数学教学

2005年第4期

目　　录

“海问、圈问、点问”艺术的实践与思考

325000 浙江省温州师范学院 方均斌

在提倡创新教育的今天, 广大数学教育工作者对“问题解决”展开了种种探究, 并探讨如何引导学生善于自己提出数学问题. 而教师的提问方法与策略对学生提问意识和能力的培养起着潜移默化的作用. 其中, 如何抓住学生的提问心理和思维特征进行恰如其分的提问和引导, 是每个数学教师应该认真思考的话题. 笔者认为, 用“海问、圈问、点问”来概括这一话题是一种尝试.

所谓“海问”有两个层面的含义: 一是教师没有指定具体内容的提问, 如:“你对本学期的学习, 有什么问题要提吗?” 二是教师没有指定具体提问对象的提问, 如“大家学习了函数的单调性后,有什么问题要提吗?” 同样, “点问”也有两个层面的含义: 一是对具体内容的提问. 如:“对偶函数的对称性问题, 能否进行推广? 即图象关于$x=a$直线对称的函数, 应该满足什么条件?” 二是指定具体学生的提问. 由于教师的“海问”没有指定具体的对象或内容, 容易给学生营造一个轻松愉快的气氛与生动活泼的环境, 加上教师带有激情或暗示的口吻,容易引发学生的“点问”. 而“圈问”指介于“海问”与“点问”之间的一种过渡提问内容或提问方式, 中间蕴涵着教师教学提问和学生提问的艺术. “点问”是提问者与被提问对象思想的“直接交锋”, 在平时教学过程中运用得较多. 在长期的教学实践中, 笔者对这“三问”有自己的一点想法, 具体概括以下的几点, 供参考.

1. 巧设“海问”, 引导“点问”

设置“海问”的目的主要有三个: 一是培养学生的发散思维, 教师从而捕捉到有价值信息, 及时调节教学; 二是让学生有一个宽松的心理环境, 选择自己感兴趣的话题来提问; 三是避免教师自己所提问题范围太狭窄或指定回答的学生范围太小而使教学处于被动. 因此, “海问”是提问的一种策略, 是教师争取教学主动, 捕捉有价值教学信息的一种教学策略, 其最终目的是让学生进行有效地“点问”, 让学生学会提问的艺术和培养他们提问的意识. “海问”一方面由于没有指定回答对象, 如果引导不当, 容易产生群体的依赖或推诿现象; 另一方面由于没有指定非常具体的“点问”也容易产生“漏问”现象. 因此, 关键在于巧设“海问”或“海问”后进行适当启发.

案例1　高一学生学好函数一章后, 教师设计一个“海问”: “关于函数这一章的学习, 你们有什么问题吗?”

有的学生马上进入思考中, 而有的学生估计老师不会提问他, 抱着侥幸的心理, 也不思考, 在观望. 一分钟后, 教室内仍然一片沉默. 教师发现有个别成绩不理想的学生在左右环顾, 于是设置“圈问”: “大家仔细思考一下,我准备先提问几个平时不太提问的同学.” 于是, 在环顾的学生开始翻书, 不得不动脑思考. 又一阵沉默后, 老师提问一个平时性格内向成绩偏下的学生甲: “你有什么问题吗?” 学生甲摇摇头, 他感觉有点乱, 不知道从哪里问起; 老师设置一个内容“圈问”: “比如说, 关于函数的性质, 你有什么问题吗?”学生甲还是摇摇头; 老师进一步设置一个内容“圈问”: “比如说, 函数的性质包括哪几个方面, 你清楚吗?”学生甲点点头, 这时教师发现一个成绩比较差的学生乙在开小差, 左右环顾,于是就提问: “乙同学, 你能回答吗?”学生乙脸一红, 站起来之前偷偷瞥一下刚翻开的课本, 结结巴巴地说: “函数的单调性、奇偶性.”老师装作以为学生乙是自己回答

的, 给予表扬, 请他坐下, 让学生乙有成就感. 此时, 学生丙早按捺不住, 举手说: "老师, 我弄不明白, 函数的单调性, 只要看看图象就可以了, 为什么要采用严格的定义给予证明?"学生丁说: "为什么要学习函数的奇偶性?有什么用?"学生戊也举手: "函数性质除了单调性、奇偶性以外, 还有什么其它性质?"于是, 在这些学生的带动下, 其他学生纷纷提出自己想问的问题. 在与全班学生讨论的过程中, 教师除了解决学生所提问题并且提出自己的想法外, 补充学生提问中的一些"盲区"问题, 然后进行概括, 再提出一些探索性话题, 使不同程度的学生都有收获.

由"海问"引导学生"点问"的过程中, 教师必须注意五个问题: 一是可以采用"圈问"作为过渡环节, 即教师可以圈定部分内容或提问对象, 圈定的范围可以逐步缩小, 使学生逐步明确提问的内容和对象, 增加心理和思维适应能力; 二是根据教学需要, 将学生的"点问"进行整理, 发现学生的共性问题和薄弱环节, 及时采取措施, 弥补教学盲区; 三是消除学生提问的顾虑. 部分学生往往怕提出的问题太简单, 引起老师和同学的讥笑, 而另一部分学生怕自己提出的问题太难或超纲, 把老师难倒或自己白白浪费时间. 要鼓励学生大胆提问, 哪怕提出的问题过于简单或自己解决不了, 教师都应该保护他们的提问积极性, 维护他们的自尊; 四是教师应该坦然对待自己解决数学问题的能力. 不应该也不必要在学生面前扮演一个无所不能的数学问题解决者的角色, 应该扮演一个与学生一起探索和解决数学问题的合作者角色. 从一定的角度上讲, 教师的这种"无能"反而会激发学生提出和参与解决数学问题的勇气和决心; 五是教师要注意激发学生竞相提问的欲望, 要鼓励学生大胆提问, 表扬其提问中的合理成分.

2. 灵活"点问", 发现问题

教学过程中单纯靠设置"海问"引导"点问"还是不够的, "海问"容易存在教学内容的盲区和问题提出的对象的盲区. 部分学生由于种种原因, 不敢或不会提出什么问题, 如果没有教师指定提问, 他们往往不会主动提出问题. 因此, 根据教学内容的需要和不同的教学对象, 教师采用灵活的提问策略, 发现学生存在的问题, 启发学生大胆地将自己的疑问提出来.

案例2　解关于x的不等式$(a^2-1)x^2-2ax+1<0\,(a\in\mathbf{R})$.

教师呈现问题后说:"请同学们思考一下, 这个问题如何解决?" (其实, 从问题的内容来划分, 它属"点问". 而从指定回答的对象而言, 属"海问".) 此时, 学生在思考或动笔, 教师在巡视, 观察学生的表情, 寻找"点问"的对象. 一会儿, 有几个学生举手, 教师向他们投以赞许的眼光并点点头, 说:"不错, 有几个同学已经有方法了! 再给一点时间, 让其他同学考虑一下." 此时, 教师乘机巡视已经举手的学生的解答, 发现学生甲在草稿纸上写着答案:"$\frac{1}{a+1}<x<\frac{1}{a-1}$", 于是请学生甲将自己的解答写在黑板上. 此时, 已经有学生在议论:"要对a的各种取值情况进行讨论!"教师装着没有听见, 问甲:"你对自己的解答有什么看法吗?" 甲反应很快:"老师,我知道你想说什么, 刚才同学的议论我已经听到了, 其实一开始我就知道要对a进行讨论, 不过感觉挺麻烦的, 于是我把主要结论写下来, 如果在考试的时候, 我会把整个讨论过程写完整的." 老师感觉甲平时办事比较随便, 数学考试经常考虑不周, 丢三落四的, 而且他这种思想在学生中有一定的比例. 于是, 老师说:"同学甲已经考虑到对a要进行讨论, 而且能够马上看出这个不等式可以采用因式分解来解, 这是非常好的. 不过认为讨论麻烦, 只把自己认为是'主要结论'写下来, 而在考试时就能够将讨论过程写完整, 这种想法平时不少同学有, 今天我们就做个实验, 请同学甲把这次练习当做考试试题, 在黑板上完整提供解题过程." 此时, 学生甲又重新到讲台上对a进行了讨论, 结果表达凌乱, 考虑不周, 于是只表达了一半就红着脸跑到自己座位上. 老师乘机对全班学生进行了教育:"我们感觉自己会做与将问题解答完整是有一定的距离, 看来我们

同学要多动笔, 尽量使得自己的解答完整而没有漏洞. 分类讨论是一种很重要的解决问题的方法和策略, 它往往能够考察我们的思维严谨性和宏观的把握, 下面我们一起来对它的完整的解法进行表达.”······

教师通过这种办法及时捕捉“点问”对象, 使学生对分类讨论引起重视, 感悟如何进行分类讨论的方法和策略. 这个环节教师有六点值得注意: 一是指定“点问”对象之前应该对所有学生“海问”, 使得全班学生觉得都有被“点问”的压力; 二是一般不能将“点问”成为有意对某些对象进行“罚问”或“刁问”, 即将“提问”作为惩罚部分学生的手段. 当然, 教师可以将“点问”成为对一些对象的“督问”, 即让一些学习不自觉的学生有适当的压力,督促他们自觉学习; 三是要注意提问对象的针对性和提问场合选择的灵活性; 四是更要注意对学生回答的评价应具有积极导向性; 五是要注意提问内容选择的完善性和典型性; 六是可以在适当的时候进行必要的追问, 完善或深化问题.

3. 妙设“圈问”, 克服“双盲”

所谓“双盲”是指两类学生: 一类学生是什么都不问, 笔者称之为“问盲”, 此类学生可能不知道该问些什么或者懒得思考, 也可能知道一些, 但没有提问的习惯; 另一类学生是没有经过仔细思考, 没有主题思想, 甚至不着边际地乱问, 笔者称之为“盲问”, 此类学生提问的动机可能不是真正为了解决问题, 教师的回答他们可能也没有认真听讲. 属“盲问”的学生可能没有掌握提问的方法, 也可能属于“思维混乱”的学生. 针对“双盲”学生, 笔者认为教师应该有策略地进行“圈问”, 培养或修正他们提问的意识或动机, 教会他们提问的方法.

案例3　关于空间两直线平行的问题.

这是一堂高三复习小结课, 授课班级学生的数学基础比较差. 教师提问:“关于空间两平行直线, 你们有什么问题吗?” 教室出现了一阵沉默. 大约一分钟后, 教师请一个平时不太提问但脑子灵活的学生甲站起来, 谈谈他的看法, 甲:“老师, 平时你都讲了, 我没有什么问题!” 几个学生笑了起来, 教师:“真的吗?” 此时, 学生乙举手发言:“老师, 我知道, 两平行直线是空间两直线的一种关系!” 全班同学被这个稚嫩的回答逗得哈哈大笑! 可是学生乙却满不在乎:“老师,你是不是想让我们提问:‘空间两条直线除了平行, 还有什么别的关系?’ ” 又是一阵笑声. 学生乙平时不太认真学习, 但又怕被老师看不起, 于是当班级同学不做声时, 他就用一些似乎“搭边”的词积极“发言”, 以示“救火”. 眼看问题要被学生乙搅黄了, 老师说:“乙同学的问题也没有错. 但是, 我们在研究空间图形的位置关系时, 首要的问题是如何判断它们的关系, 其次当它们具有某种关系时, 应该具有什么性质等, 然后才是其它问题. 请大家首先按照这两个方面提出问题.” 当学生讨论好第一个问题后,学生丙问:“老师,我在一次作业上, 关于问题:‘求证: 两平行直线与一个平面所成的角相等.’ 我采用将它们斜足连线的办法,利用两斜线被这条连线所截得的同位角相等的办法, 说明结论成立, 为什么你在上面批改时, 打个问号?” 老师于是乘机“圈问”: “丙同学的问题在我们班另外几个同学的作业中也存在, 不过我想把这个问题请作业没有交的同学回答, 也请其他同学思考一下.” 于是, 一些成绩比较差的学生不得不思考, 连续问了几个学生, 他们都支持丙的意见, 当问到学生丁的时候, 丁却说:“我与丙的方法不一样, 我认为这两条平行直线可以确定一个平面, 那么确定的平面与已知平面所成的二面角是一个定值, 和这两条直线与已知平面所成的角相等, 因此结论成立.” 这时, 教师意识到学生有关概念不是很清楚, 而且分类讨论也比较薄弱, 从而与学生一起讨论, 弄明白有关概念并与学生探讨如何分类等. 在教师的灵活“圈问”下, 一些平时成绩比较差的学生也积极参与, 结果这节课学生通过讨论, 解决了一些似是而非的问题.

通过实践, 笔者体会到“问盲”的产生往往有两个原因: 一是根本无法进入问问题的平台, 他们根本不知道该问什么, 于是干脆不问; 二

(下转第4–31页)

教学叙事——教研活动的一种有效方式

435100 湖北省大冶第一中学 张贵钦

教育教学理论具有二重性. 枯燥的文字, 脱离背景的抽象, 逻辑上的无误, 呈现出教育教学理论冰冷的美丽. 但, 这只是教育教学理论的一重性格. 实际上, 每一条教育教学规律的背后, 都有一大堆鲜活的故事, 正是这些鲜活的故事成为驱使教育家们愿以毕生的精力追求答案的动因. 这是教育教学理论的另一重性格.

叙事的本质在于讲述人类的经验, 作为人类经验的重要组成部分, 教育经验领域无疑也是叙事发展和渗透的领域. 教学叙事通俗地讲就是让教师讲述自己与课程、教育教学有关的故事. 强调以叙事的方式去探究有关教师的事例. 在讲故事中体现教师对教育教学事件的理解, 诠释教师对教育教学意义的感悟. 教学叙事致力于回归教师的日常工作, 在教师活生生的经验和体验中编织教育教学意义之网, 寻求教育的真谛. 在实践中学习教育理论, 提升自身素质.

教学叙事有别于说课. 说课与课堂教学密切相关, 教学叙事却可延展到课堂教学之外, 并且不受格式的约束.

教学叙事不同于个案研究. 教学叙事是线索在先, 主题在后; 个案研究则是主题在先, 线索在后.

从广义上讲, 教育教学活动中的每一事件都可以作为教学叙事的素材, 但作为教育科学研究方法之一的教学叙事, 应具有如下一些特点.

客观性. 教学叙事是写实的, 客观性是教学叙事的首要条件. 所谓客观性就是教育对教学事件发生的情景、主要情节进行客观的描述, 而不能歪曲、捏造.

有效性. 教学叙事是真实的, 但真实的却不一定有效. 所谓有效性是教学叙事的内容本身具有现实意义、应用价值和研究价值, 能体现教学方法、教学手段、教学思想、教学原则的意义, 能引起人们的思考, 从中汲取有益的思想和方法.

反思性. 教学叙事的典型性、有效性, 为教师提供了思考的空间. 所谓反思性就是指教师对教育教学活动中不自觉的、无意识的、潜意识的行为不断进行解剖、责问, 不断地搜索隐藏在教育教学活动后面的观念和思想, 使自己的教育教学思想和教育教学行为在批判的基础上进行建构和重建.

教师与学生朝夕相处, 与教材密切接触, 最容易感受教育教学实践中的成功与失败. 他们都擅长讲故事, 乐于探究自己和别人故事的意义. 例如, 在一次教研活动中, 一位数学教师讲述了这样的一个故事:

在讲等比数列求和公式的证明时，我选用了微软公司到北大招聘博士生的一道考题作为引例.

[引例] 现有1000个苹果分装在10只箱子中, 要求不拆箱, 就能随意拿出任意数目(不超过1000)的苹果, 问如何分装?

过了几分钟, 我开始了一问一答式的启发……

在我的指导下, 同学们得到了如下的装箱方法(记第i只箱子所装的苹果数为a_i, 下同):

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=2^2$, $\cdots$, $a_9=2^8$, $a_{10}=2^9$.

我提示, 为了确认这样的装法是否满足题意, 需要计算$1+2+2^2+\cdots+2^9$是否超过1000, 这就要用到错项相消法. 接着, 我便用

错项相消法证明了等比数列的求和公式, 并介绍公式的特点, 使用时注意的事项、例题等.

课后, 我问学生:“有趣吗?”

学生回答:“一般.”

这件事对我触动很大, 为什么我千挑万拣筛选出的事例, 没有引起学生的共鸣?

在第二次讲授同一内容时, 我还是出示了同一引例, 只是变换了教法, 采用情境教学法.

约过15分钟, 通过小组合作方式, 有部分同学获得了正确的答案: $a_1=1$, $a_2=2$, $\cdots$, $a_{10}=489$. 我问其中一个成功者, 你是怎样得到 $a_{10}=489$ 的? 他说明了自己的思想过程:

$\because 1+2+2^2=7=2^3-1$, $1+2+2^2+2^3=2^4-1$, $\cdots$, $\therefore 1+2+\cdots+2^8=2^9-1=511$, $\therefore a_{10}=489$.

没用错项相消法, 算出了结果. 我为学生有敏锐的数学洞察力感到高兴. 接着问: $1+2+\cdots+2^n=$? 你能证明吗? 心想, 这回你没辙了吧.

谁知, 过一段时间, 竟有几个同学给出了证明:

$\because 2^3-1=2^3-2^2+2^2-2+2-1=2^3+2^2+2-(2^2+2+1)=2(2^2+2+1)-(2^2+2+1)$,

$2^4-1=2(2^3+2^2+2+1)-(2^3+2^2+2+1)$, $\cdots$,

同理, $1+2+2^2+\cdots+2^n=(2^{n+1}-2^n)+(2^n-2^{n-1})+\cdots+(2-1)=2(2^n+2^{n-1}+\cdots+1)-(2^n+2^{n-1}+\cdots+2+1)=2^{n+1}-1$.

太精彩了, 这不就是错项相消法的变化形式吗? 我正打算作一些铺垫再推广到一般情形, 一个不和谐的声音冒了了来:

“老师, 刚才我们用 2^0、2^1 表示了正整数1、2、3; 用 2^0、2^1、2^2 表示了正整数1、2、3、4、5、6、7, 那么我们能用 2^0、2^1、$\cdots$、2^n、$\cdots$ 表示任意一个数(十进制), 而确保无一例外吗?”

这的确是一个我始料未及的问题. 我意识到, 这是一个二进制与十进制之间的互换问题, 是一则很好的研究性素材, 想到同学们已具有初步的二进制知识, 只是没有作进一步深入的研究, 于是, 我决定还是让学生作为研究性课题, 通过自己查找相关的资料予以证明, 并约定同学们把自己的研究成果带到三天后的数学课上来.

虽然, 这节课我未能完成预定的计划, 但从同学们飞扬的神态中, 我意识到这节课成功了.

这位教师讲的故事很简单, 第一次讲授时运用的那种“剥竹笋”式的教学方式在当前数学教学中普遍存在, 很多教师往往会自觉或不自觉地采用这种“流行”的或“传统的”教学方法, 这实际上是一种文化现象. 叙事教师的意外, 折射出他对这种文化现象的思考——什么样的教法才是启发式教学法? 什么样的教法才是情境教学法?

既有发现的思想, 又运用了程序的原则, 这就是启发式教学法, 启发式可看成是重视了教师指导作用的、编制了一定认识程序的发现法, 它优于一般意义的发现法. 但, 教师过度的“指导”, 实际上变成了对学生的主宰. 扼杀了学生学习的积极性和主动性. 课堂上虽然也有一些火热的场面, 看似学生不断思考, 其实是通过问答式, 老师牵着学生走. 火热的场面实质上反映的是教师自己的思维过程, 不是学生主动学习的过程, 因此这种教法, 不是真正意义上的启发式教学, 自然就达不到激发学生学习热情的目的.

情境教学法是指教师有目的地引入或创设具有一定情绪色彩的、以形象为主体的、生动具体的场景, 以引起学生一定的态度体验, 从而帮助学生理解教材, 并使学生心理机能得到发展的方法. 其核心是激发学生的情感. 情感是学习的动因, 学生靠自己动手、动口、动脑获取情感体验, 他们在低起点中获取小成功, 进而在勤奋中获得大发展. 因此, 在教学过程中, 凡是学生经过思考会说的, 教师决不能代说, 凡是学生经过努力能探索的, 教师决不能

(下转第4–8页)

教师成长: 以教学案例为载体的行动研究

321004 浙江省师范大学数理学院 朱 哲

1. 引言

教育研究者必须思考实践如何上升为理论, 以及理论如何指引实践的问题. 教师教学知识的发展过程, 或者更广义地说是教师的成长, 正是这样一个具体的问题. 教师自身发展更多地关注教学实践如何上升到理论, 从而指引自身今后的教学实践; 教师在职教育则更多关注理论如何向实践转移, 使专家"倡导的理论" (espoused theories) 真正成为教师"采用的理论" (theories-in-use)[1].

解决理论向实践转移的做法主要有结合课例的同事互助指导 (peer coaching)、案例教学法 (case methods of teaching) 和行动研究 (action research) 等几种. 在教学中, 行动研究的实质就是广大教师通过行动与研究的结合, 创造性地运用教学理论研究和解决不断变化的教学实践情境中的具体问题, 从而不断提高专业实践水平的一种研究类型和活动. 在行动研究中, 缺少教师自身的教学反思 (reflective teaching) 以及专家的协助和指导, 并不能取得很大的成效.

综合文献研究、经验总结以及对当前教学和课程改革实践的深入洞察, 顾泠沅等曾提出"以课例为载体的教师教育模式"[2], 我们对此稍加改编, 加入"行动研究"元素, 提出一种教师成长的方式: 以教学案例为载体的行动研究. 它更强调教师的主动参与与投入, 以及与专家的互动, 从而达到在行动和研究中成长. 这种行动研究有以下几个要点: ① 参与者包括一线教师以及数学教育研究者 (专家), 一线教师作为研究的客体同时也是研究的主体; ② 一线教师既要保持同事之间的互助支持, 同时注重纵向的理念引领和专家指导; ③ 无论教师还是专家, 既要保持侧重讨论式的案例教学, 还须包含行为自省的全过程反思.

2. 基本模式

"实践反思模式是面向未来的教师教育的基本模式."[3] 以教学案例为载体的行动研究, 属于这一模式, 它通过教学实践、理论指导、行动反思达到一种更新、发展和成长. 实施"以教学案例为载体的行动研究"的基本模式, 如图1所示.

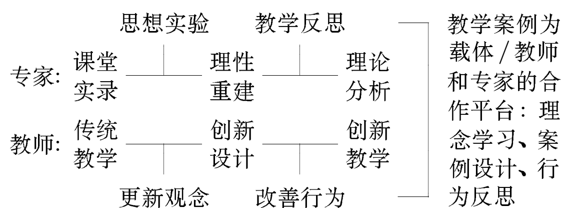


图 1

这一模式说明了本研究的过程分教师和专家两条线进行. 教师在进行传统的教学后, 通过专家的指导, 学习一些新的教学理论, 更新观念, 对传统的教学过程重新进行设计, 使其具有创新成分, 并利用这创新设计改善教学行为, 进行创新教学. 对于专家而言, 先是对教师的传统教学进行观摩, 对其实录, 编成教学案例; 随后对这一教学案例进行分析, 运用教学理论对原案例进行理性重建, 改编成新的教学案例, 这是一个思想实验的过程; 其后结合教师的创新教学, 和他们一起对教学进行反思, 对新案例进行理论分析. 通过这样一轮活动, 达到理论与实践的碰撞与融合. 很明显, 教学案例是本研究的载体. 借助于教学案例 (传统案例和创新案例), 教师和专家进行合作, 这些合作活动包括理念学习、案例设计和行为反思.

3. 研究案例

为了对上述基本模式进行说明, 我们在此

选择了一个教学内容的研究过程作为研究案例, 以时间顺序给出三个教学案例, 使教师与研究者(专家)在共同制作教学案例时出现的困惑与思索、教师在理念与经验引领之下的行为自省、教学经验重构、扎根理论建立等过程有一个全景式的展示.

♦案例1:《圆锥曲线·椭圆》的传统教学[4]

(1) 引出课题: 汽车油罐的横截面的轮廓, 行星和卫星运行的轨迹等.

(2) 探讨椭圆的本质特征, 给椭圆下定义: 教师利用两个图钉, 一条定长的细线, 一支粉笔, 在小黑板上演示一个椭圆形成的过程; 要求学生注意观察该画图过程, 思考椭圆与圆有哪些相同与不同的特征.

(3) 根据椭圆定义, 推导椭圆的标准方程.

(4) 例题讲解和练习.

(5) 小结.

♦对案例1的反思

这一内容通常以椭圆的机械画法引入. 也有教师先讲海尔·波普彗星的现象, 或者拿出一个圆锥模型让学生观察截面的形状, 再由机械画法引出椭圆的定义以及焦点的概念. 这样教师直接地、生硬地把概念"抛"给了学生. 尤其是"焦点", 更象是"从天而降"; 而焦点之所以为焦点, 学生却是不明所以. 教师应给学生独立探索的时间和自由想象的空间, 让他们经历数学知识发生、发展的全过程. 这样学生成为学习的主体, 而教学真正建立在学生自己探索、思考、理解的基础上. 于是教师和研究者共同设计了新颖的案例2.

♦案例2:《圆锥曲线·椭圆》的创新设计

(1) 问题:"椭圆"两字让你想到了什么? 或者说椭圆与圆有什么关系 (图2～图4: 压扁的圆、拉长的圆、倾斜的圆)?

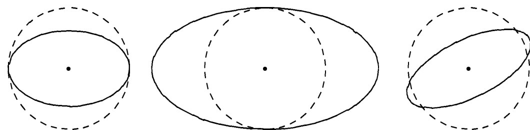


图 2 图 3 图 4

(2) 问题:椭圆怎么画? 圆可以用圆规, 因为它是到定点距离等于定长的点的集合. 那么, 椭圆又会有什么性质呢?

(3) 动画演示:"压"圆成椭圆,圆心"弹开", 半径"分成"两条 (图5～图7).

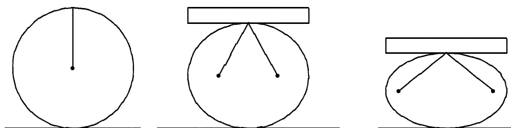


图 5 图 6 图 7

(4) 观察:椭圆两条"半径"与圆的半径有什么关系 (相等)?

(5) 动画:两条"半径"与椭圆的交点移到其它位置 (图8).

(6) 猜想:这两条长短不同的"半径"与圆半径有什么关系 (和为半径的两倍)?

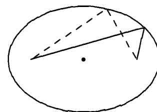


图 8

(7) 画图:利用猜想画图(实质是椭圆的机械画法), 也可用几何画板演示这一过程.

(8) 形成定义:由学生来概括椭圆的定义, 教师根据其回答适当补充.

(9) 解决问题:根据定义, 求椭圆方程.

♦对案例2的反思

案例2有几个优点:一是由直观引入. 以圆为知识基础, 抓住椭圆与圆的关系, 直观、形象、生动. 二是椭圆的定义不是教师给出的, 而是学生自己通过观察、猜测、并画图检验的过程中概括出来的. 但也存在着问题, 比如说对于焦点的定义, 不但没能让学生知其然且知其所以然, 反而让学生错误地认为焦点是由圆的圆心分开而来的. 另外, 假如说学生事先预习了课本, 已经知道了椭圆的定义, 轻松答出问题2, 那教师该如何处理呢? 接下来的动画演示、探索猜想、概念形成还有意义吗? 无论教师事先设计的教学过程多么巧妙, 可学生一旦预习过, 那么所谓的在课堂上展现的探索过程, 往往成为师生间一次拙劣的表演.

对此, 研究者和教师一起进行了深入的思考, 最后找到一种方法: 对教材进行深加工. 教师认真研究学生的认知水平, 仔细分析教材, 深入挖掘数学内部的联系. 在此基础上, 对教材内容进行重新编排, 设计出一个既以教材内容为基础的, 又不同于教材编排顺序的教学方案. 以此为蓝本, 发现式、探究性的教学得以顺利地展开. 《圆锥曲线》中的三种曲线, 哪种学生最熟悉? 毫无疑问, 是抛物线. 因为他们对二次函数及其图象是熟知的, 而$y=kx^2\,(k\neq0)$这类函数图象即是抛物线的一种. 可以把抛物线提到椭圆、双曲线之前来学习. 由此, 研究者和教师共同设计了案例3. 在教学之后, 又对其进行了理论分析.

♦案例3:《圆锥曲线·抛物线》的创新教学[5]

(1) 活动: 折纸. (图9) 在纸片2厘米处设置一点, 如图示方法, 将纸折20到30次, 形成一系列折痕, 它们整体地勾画出一条曲线的轮廓.

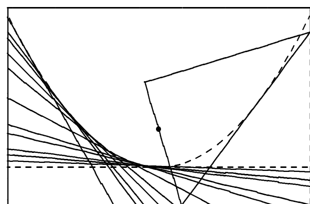


图 9

(2) 观察、猜想: 众多折痕围出一条抛物线.

(3) 建立坐标系, 画图, 发现与$y=\dfrac{1}{4}x^2$很接近.

(4) 几何画板动态演示折纸过程及抛物线.

(5) 活动: (图10) 画三条平行于y轴的直线, 折纸, 发现1: 其反射线经过y轴上一定点.

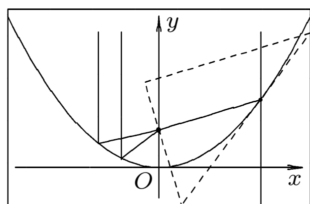


图 10

(6) 几何画板演示这一过程(证明可让学生课后完成).

(7) 概念形成: 焦点(一组平行于y轴的直线经抛物线反射后汇聚到焦点, 由焦点出发的直线经抛物线反射后成一组平行线).

(8) 发现2: 抛物线上的点到焦点的距离等于到纸边的距离. 定义准线.

(9) 形成定义: (学生概括, 教师补充) 平面内与一个定点F和一条定直线l的距离相等的点的轨迹叫做抛物线. 点F叫做抛物线的焦点, 直线l叫做抛物线的准线.

记$e=\dfrac{MF}{ML}$, 且$e=1$ (ML为抛物线上一点M到直线l的距离).

(10) 求抛物线标准方程(分四种情况, 略).

(11) 探究e值的改变, 引出问题: 抛物线$e=1$, 那么, 当$0<e<1$以及$e>1$时, 轨迹又如何呢 (引出下一课题: 椭圆和双曲线)?

♦对案例3的理论分析

(1) 要在教材的深加工上下工夫.

案例3打破了原有教材的知识编排体系, 改变了传统由教师按照教材, 把概念直接"抛"给学生的教学方式. 原来教材次序是椭圆、双曲线、抛物线. 案例3则从问题情境(折纸活动)到发现抛物线轨迹、焦点、准线, 形成定义; 从抛物线定义中对e的分类讨论引出椭圆和双曲线的轨迹及其定义. 问题的引发自然、恰当, 概念的产生和形成是学生探究问题本质联系的产物, 而三种圆锥曲线概念又构成一个有机整体. 事实上, 数学是中学课程中最富于系统性和内部联系的学科, 数学教学应让学生充分感受数学内部的联系以及运动与变化. 考虑到教材是封闭的体系, 而教学是生动的、灵活的, 这就需要教师根据学生的认知水平, 深入挖掘数学内部的联系, 对教材进行处理, 设计出一个既以教材内容为基础的, 又不同于教材编排顺序的教学过程.

(2) 数学教学应有利于学生的再创造.

案例3中引入了折纸活动, 使原本单调、枯燥的数学课生动起来, 充满了乐趣; 定义的给出, 不是教师也不是教材"抛"出的, 而是学生自己发现、概括的. 教师的工作是把教学设计

成学生动手操作、多媒体辅助、观察猜想、揭示规律、引入定义、形成概念等一系列过程. 传统的教学侧重于学生对概念的接受和结果的掌握; 案例3侧重于概念的产生、构建、形成, 学生对过程的探究及在此过程中所形成的一般数学能力. 事实上, 在教学中, 教师不必将各种规则、定律灌输给学生, 而是应该创造合适的条件、设置丰富的情境、提供具体的例子, 让学生在实践活动的过程中, 自己"再创造"出各种概念、法则, 或是发现有关的各种规律. 教师的关键是设计好的问题情景和活动, 并在学生探究受阻时, 恰当地介入和诱导.

(3) 数学教学应有利于学生学会数学化.

数学发展的历史表明, 每一个重要的数学概念的形成和发展, 其中都有丰富的经历; 然而出现在数学教科书中时, 却掩盖了其中人类探索的"火热的思考", 而凝固成"冰冷的美丽". 对学习者个人而言,数学概念的形成过程应该是一个数学化的过程. 在案例3中, 学生的思维不一定真实重演人类对圆锥曲线认识的过程, 但确确实实通过观察、比较、分析、归纳、抽象、概括等思维活动, 在探索中学习数学化. 教师要充分发挥创造性、能动性, 设计出合理的、有利于学生学会数学化的教学过程.

4. 说明与思考

"以教学案例为载体的行动研究"在实践中是一个丰富的、多元的、需要根据实际情况不断地加以调节的过程. 如何促使教师在教育行动中成长, 专业引领与行为跟进是两个必须把握的关键性问题. 在行动研究过程中, 我们发现教师的参与有从被迫参与(迫于领导的压力)到主动参与 (自身有需要)、消极投入(跟着专家走)到积极投入(能提出自己的见解和建议)的转化. 如何使教师快速实现这种转变, 值得我们进一步研究.

"以教学案例为载体的行动研究"作为一种教师成长的模式, 有如下三个要素: ① 教学案例, 它是行动研究的载体; ② 合作平台, 教师和专家的合作平台主要有理念学习、案例设计、行为反思; ③ 运作过程, 包括教师和专家两条流程. 教师流程包括原行为、新设计、新行为三个阶段, 其间有两轮在寻找差距中的反思和调整; 专家流程包括观察、思考、分析三阶段. 这两条流程多次往复, 达到螺旋式的上升. 这种合作式的研究也改变了传统的观念, 它说明不一定是专家才能判断知识传导的有效性, 第一线教师也有能力成为教育研究的参与者, 他们的参与将缩短研究成果与应用的距离以及教与学的距离[6], 并有效地改进教师的教学行为.

参考文献

[1] 张维忠. 有效地改进教师的教学行为[J]. 数学教育学报. 2001.10 (4). P.25-28.

[2] 顾泠沅、王洁. 教师在教育行动中成长[J]. 课程·教材·教法. 2003(1).P.9-15. 2003(2). P.14-19.

[3] 顾泠沅. 教师教育的专业化与教师继续教育课程. 载教学改革的行动与诠释[M]. 人民教育出版社. 2003. P.410.

[4] 钟善基. 中国著名特级教师教学思想录(中学数学卷)[M]. 江苏教育出版社. 1996. P.236.

[5] 刘智强、朱哲. 圆锥曲线概念教学重新设计[J]. 数学教学. 2003 (10). P.5-7.

[6] 安淑华. 数学教育中的行动研究[J]. 数学教育学报. 2002.11 (2). P.5-8.

(上接第4-4页)

代做, 而且还要设计一定的情境引导学生去做. 那位叙事教师第二次教学时的成功在于他准确地把握了情境教学法的特点.

在叙事活动中, 我体会到教师知识是一种积累, 更是一种应用. 如果通过一次次教学叙事活动, 教师由一名普通听众变成一位身体力行的实践者, 并对一些"传统的"、"流行的"、"先进的"教学行为进行反思, 养成理论学习与教育实践相结合的习惯, 那么, 在讲故事、听故事的活动中, 促进自身素质的提高决不会是一句空话.

关于球体积公式教学各异的调查与分析

471003 河南洛阳中国一拖集团公司第一高中 任明骏

1. 问题的提出

随着新课程标准推行的临近, 有关课程设置的探讨越来越多, 引起了大众的关注. 怎样才能使课程更合理、更科学、更符合学生的实际, 是每一位课程开发者的首要职责, 也是每位教师关心的事.

球的体积作为高中数学课程的一节, 不同的教师在教学中使用的方法各异,有的教师以此为契机,介绍中外各种方法,来显示自古至今人类的艰辛探求历程; 有的教师启发点拨, 让学生自行寻找结论, 以开发学生的思维空间; 有的教师照本宣科, 讲述了教材中的方法; 甚至有的教师把该节内容删去, 只告诉结论 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$. 那么, 在教学中, 究竟应该如何处理这一内容呢? 另外, 在高级中学课本《立体几何》(必修) 中, 球的体积是利用祖暅公理推导出来的, 而在近年来的新教材中, 用切片法取代了这一沿用了几十年的方法, 切片法是否优于公理法呢?

基于这些问题, 笔者进行了调查研究.

2. 研究过程

2.1 对象

选取一所企业子弟学校高二年级的364名学生作为样本. 学生成绩参差不齐, 调查时做到好、中、差兼顾.

2.2 方法

采用问卷和访谈法. 发出问卷364份, 收回有效问卷322份, 回收率为88%. 对其中的部分被试进行访谈.

2.3 步骤

在学习球的体积结束后, 马上补充其它的推导法, 使学生共接触了4种方法, 在这里分别称之为公理法 (祖暅公理)、切片法 (新教材中的方法)、锥体法 (把球面分割, 而后把球分成以球心为顶点、球面为底面的锥体)、合盖法 (刘徽和祖暅的牟合方盖方法), 并附以相应的问题, 第二天收回, 进行统计, 然后访谈部分被试.

3. 调查结果

3.1 对四种证明方法各有所爱

在回答问题1"对于这四种推导方法, 你感觉如何?"时, 被试的回答结果见表1.

表1 被试对四种方法的满意程度 (百分比)

方法	满意	还可以	不满意
公理法	168(52.2%)	106(32.9%)	48(14.9%)
切片法	112(34.8%)	121(37.6%)	89(27.6%)
锥体法	185(57.4%)	100(31.1%)	37(11.5%)
合盖法	38(11.8%)	115(35.7%)	169(52.5%)

由表1可以看出, 最令人满意的是锥体法, 有 57.4% 的学生感到满意, 新教材中的切片法仅有34.8%的学生满意, 最不让人满意的是合盖法, 只有一成稍多的学生满意, 而一半以上的人不满意. 这与随后的结果基本一致. 对于问题2"你最偏爱哪一种方法?" 共有102人(31.7%) 选择公理法, 93 人 (28.9%) 选择切片法, 115 人 (35.7%) 选择锥体法, 12 人 (3.7%) 选择合盖法.

3.2 教学时应提供的方法种数

在回答问题3"在教学中, 应采取几种方法为宜?"时, 结果如下表2:

表2 教学中采用的推导方法数

方法	1种	2种	3种	4种
人数	38	148	92	44
比例	11.8%	45.9%	28.6%	13.7%

表2表明, 在教学中, 学生愿意见到不同的方法, 但不要过多, 最好是两种方法.

3.3 推导方法对学生的作用

对于问题4"在直角坐标平面内, 由直线 x

$= 1$, $y = 0$和曲线$y = x^2$围成一个平面图形(如图1), 你有办法求出它的面积吗?" 有约30%的学生求得正确结果, 约30%的学生用单位正方形的面积减去半径为1, 圆心角为$90°$的扇形的面积, 显然, 这是把抛物线误认为圆弧, 其他学生根本无从下手.

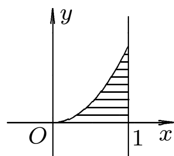


图 1

凡回答正确者无一例外都是受切片法的启示, 将该区域分割成一系列的小曲边矩形, 然后近似成小矩形, 再求和, 最后求极限.

对于问题5"设有一个椭圆, 其长轴为$2a$、短轴为$2b$, 现将椭圆绕长轴旋转得一个椭球体, 你有办法求出它的体积吗?" 共有63人(占总数的19.6%)得到正确答案$\frac{4}{3}\pi ab^2$, 其中47人(占答对人数的74.6%)采用的是切片法, 即把半个椭球体n等分, 把每一份看成圆柱, 求出体积, 相加, 再求极限. 另外16人(占答对人数的25%)利用祖暅公理, 即构造一个与椭球截面积处处相等的几何体(如图2).

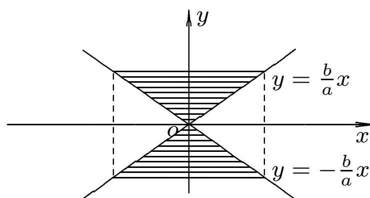


图 2

4. 原因分析

4.1 学生喜欢简约, 避繁就简

对于问题1, 学生之所以倾向于公理法和锥体法, 大部分被试认为这两种方法简单明了, 便于理解, 容易接受; 而切片法的教学过程长, 计算量大, 麻烦且易错; 对于我国古代的数学家刘徽和祖暅使用的牟合方盖法, 被试普遍觉得太深奥了, 术语太多, 难以理解, 自己根本不可能想到, 即使勉强看懂了, 也无法掌握. 根据奥苏贝尔的意义学习理论, 在学习时, 学生表现出一种意义学习的倾向, 即表现出一种在新学的内容与自己已有知识之间建立联系的倾向, 而且能够与学生已有知识结构联系起来. 公理法和切片法正是在圆柱和圆锥的基础上进行的, 而合盖法与学生现有知识结构之间存在很大空档. 这样的学习也就没有什么效果可言. 在随后的访谈中, 一些学生(成绩较好善于思考问题者)对锥体法提出疑问: 球的表面积是如何求出的? 当然, 这种方法是在$S_{球} = 4\pi r^2$的前提下得出的, 而要求得球面面积并不简单.

4.2 学生对极限的认识不足

在新教材中, 极限放在了高三的选修课程内, 在学习立体几何之前, 触及的大多为"有限"的思想, 很少利用"无限"来处理问题, 更不用说极限了. 因此, 在解释为什么对切片法和公理法不甚满意时, 20%的被试提出了疑问: 这样的结果不严密、不科学, 它是近似的吧? 在访谈中也发现: 一旦他们理解了极限的概念, 又会对这些很感兴趣, 为这一新颖的方法叫好, 这也充分显示了现代数学的巨大威力. 看来极限作为一种数学思想和工具, 对学生思维水平的提高是大有帮助的, 应该及早向学生渗透极限思想.

4.3 学生的急功近利和被动学习

在问卷中, 笔者顺便设置了这样一问: 在教学中, 这4种方法是否有必要全部讲述? 回答的结果是约四分之一的被试认为"有必要", 同样的约四分之一的被试认为"没必要", 其他一半觉得"无所谓". 究其原因, 回答"有必要"者大多觉得多种方法开阔视野, 丰富知识, 每种方法各有优点, 在学习中体会不同思想, 效果更好; 回答"没必要"者普遍认为在此花费太多的时间是不明智的, 必然会影响其它内容的学习. 有的甚至说: "高考又不考, 讲这些干什么?"、"只要记住公式就行了, 管它怎么来的!"看来, 某些学生的学习存在急功近利思想, 学习总是围绕着考试和高考而进行的. 对于持"无所谓"态度的被试者, 又可分为两类: 一类是具有上述两种想法, 心里矛盾, 犹豫不定; 另一类学生的学习全是由老师决定, 老师教什么, 自己就

高三复习课学生“插嘴”引发的妙想

226521 江苏省如皋市丁堰中学 郭仇建

在高三复习课上, 笔者引导学生参与下列例题的分析过程.

例 已知点 $A(2,2)$, 设 F 为椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的右焦点, M 是椭圆上一动点, 求 $|AM|+\dfrac{5}{4}|MF|$ 的最小值, 并求此时 M 点的坐标.

分析: (1) 能否建立目标函数求最值?

设 $M(x,y)$ 是椭圆上任意一点, 则

$$|AM|+\frac{5}{4}|MF| = \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} + \frac{5}{4}\sqrt{(x-4)^2+y^2},$$

再转化为一元函数的最值问题. 显然代入消元不易.

(2) 可否转化为三角函数求最值?

设椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上任一点 M 的参数坐标为 $(5\cos\theta, 3\sin\theta)$, 则

$$|AM|+\frac{5}{4}|MF| = \sqrt{(5\cos\theta-2)^2+(3\sin\theta-2)^2} + \frac{5}{4}\sqrt{(5\cos\theta-4)^2+(3\sin\theta)^2},$$

最值易求吗?

(3) 观察 $|AM|+\dfrac{5}{4}|MF|$, 思考下列问题:

① 为什么 $|MF|$ 要乘以 $\dfrac{5}{4}$?

学什么, 老师怎么教, 自己就怎么学, 完全是被动地学习, 勿庸置疑, 目前, 这类学生不在少数.

5. 几个结论

5.1 对4种方法的评价

合盖法巧妙的构思, 恰当的转化, 不能不让人为之惊叹. 但术语过多, 难度过高, 又使人望而却步. 锥体法既简单, 又体现现代数学思想, 因而满意率最高, 但必须以球表面积为前提. 在没有推得球面面积之前, 这种方法不严密. 公理法运算较少, 直接明了, 同时又能反映我国古代数学成就, 但等体积的几何体却不易构造. 切片法运用极限, 方法具有可推广性, 但运算量太大, 容易出错.

5.2 对教材的建议

教学应以一种方法为主, 如新教材中的切片法, 但其它方法也应有所提及, 可以放在阅读材料中, 供有兴趣的学生阅读. 新课程标准在选修内容中安排数学史知识选讲, 球体体积推导历程就是很好的素材.

极限作为一种新的工具, 对于培养思维的深刻性、复杂性, 有着独特的作用, 所以应该及早渗透, 例如, 和老教材一样, 将极限放在数列一章, 这样既可使知识具有系统性, 又体现了现代数学对中学数学的指导作用.

5.3 对教学的建议

由调查可以得出, 球体积教学, 采用两种方法为好, 不宜过多过少, 且要选取简练便捷的方法.

由3.3可以看出, 学生能够解决问题4和问题5, 关键是得益于球体积公式推导法的影响, 不同的方法对学习者都会有不同的启示. 教育心理学家加涅指出: 影响问题解决的最明显的因素是学习者必须能回忆起先前习得的与问题有关的规则, 正是这些推导方法所用到的思想在解决问题过程中被激活, 才使问题得以解决. 因此, 教学时要注重思想方法的教学, 切不可就题论题, 即“授人以鱼, 不如授人以渔”.

参考文献

[1] 黄桂君. 在球体体积教学中渗透数学思想史. 数学教学. 2004. 2. P.44-45.

[2] 谷政等. 祖暅原理与一类几何体的体积. 中学数学月刊. 1997. 8. P.38-40.

② 这里的 $\frac{5}{4}$ 表示什么?

这里的 $\frac{5}{4}$ 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的离心率 $e=\frac{4}{5}$ 的倒数, 而 $|MF|$ 是椭圆上任一点到焦点的距离, 联想到椭圆的另一个定义, $\frac{5}{4}|MF|$ 表示 M 点到右准线的距离 $|MN|$, 从图中(图略)得知当 AM、MN 共线时, $|AM|+\frac{5}{4}|MF|$ 为最小, 即 A 点到右准线的距离为 $|AM|+\frac{5}{4}|MF|$ 的最小值, 此时过 A 点作右准线的垂线与椭圆的交点为所求的 M 点 (解答由学生完成).

小结: 此题我们从观察入手, 发现"特征数值 $\frac{5}{4}$ 是椭圆的离心率的倒数"这一隐含条件, 联想到椭圆的第二定义, 获得问题的解决.

这时有学生A"插嘴":

"老师, 如果题目中没有这个 $\frac{5}{4}$, 还能求最小值吗?"

没有了 $\frac{5}{4}$ 还能求最小值吗? 笔者课前还真没想过! 是搪塞过去? 还是引导同学们探讨一下呢?笔者选择了后者!

"你是怎么想到这个问题的?"

"我想这道题中 $\frac{5}{4}$ 起着关键作用, 如果没有 $\frac{5}{4}$ 或者改成其它的什么数, 可能就不好求解. 所以就想问问老师."

"好的, 让我们一起来研究把 $\frac{5}{4}$ 改为1时如何求最小值."

这样题目改为: 已知点 $A(2,2)$, 设 F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的右焦点, M 是椭圆上一动点, 求 $|AM|+|MF_2|$ 的最小值, 并求取得最小值时 M 点的坐标.

引导学生分析: $|MF_2|$ 是椭圆上的点 M 到右焦点的距离, 联想到点 M 到左焦点 F_1 的距离, 连结 MF_1, 有

$$|MF_1|+|MF_2|=2a=10.$$

则

$$|AM|+|MF_2|=|AM|-|MF_1|+2a.$$

学生1: 噢, $\triangle AMF_1$ 中两边之差 $|AM|-|MF_1|$ 小于第三边 $|AF_1|$, 当三点 M、A、F_1 共线时是最大值, 不是最小值.

学生2: 两线段之差 $|AM|-|MF_1|$ 小于等于 $|AF_1|$, 应该"加上绝对值". 即

$$||AM|-|MF_1||\leqslant|AF_1|,$$

$$-|AF_1|\leqslant|AM|-|MF_1|\leqslant|AF_1|,$$

这样, 左边代入是最小值, 右边代入是最大值.

所以, 此题的解法为: 连结点 A 和左焦点 F_1 得到直线 AF_1 与椭圆交于两点 M_1、M_2, 求得点 M_1、M_2 的坐标.

当点 M 取 M_1 时 $|AM|+|MF_2|$ 有最小值为 $10-2\sqrt{10}$;

当点 M 取 M_2 时 $|AM|+|MF_2|$ 有最大值 $10+2\sqrt{10}$.

学生3: 我想到一种方法, 要在椭圆上找一点 M 使 $|AM|+|MF_2|$ 最小, 只要想到从点 F_2 发出的光线射到椭圆上, 反射后经过点 A, 而反射点就是所求的点.

教师: 你怎么有这样的想法呢?

学生3: 我联想到以前有这样一个题目:

在直线 l 上求一点 P 到直线 l 同侧的两点 A、B 的距离之和最小.

那时是利用对称点来求的, 实际上就是从点 A 发出的光线射到直线 l 上, 反射后过点 B. 这样联想到可以利用椭圆的光学性质——从一个焦点 F_2 发出的光线射到椭圆上, 经椭圆反射后一定经过另一焦点 F_1, 同样得到这道题目的解法.

真是奇思妙想! 一道题目让学生参与分析, 竟然想到了椭圆的光学性质, 这是笔者始料未及的. 学生的智慧真是无穷无尽.

这时有一位学生B"插嘴":

"老师, 这道题目中, 点 F 是椭圆的一个焦点, 如果不是焦点, 还能求最小值吗?"

根据上题的解答, 有学生很自然地想到这一点的. 题目改为:

已知点 $A(2,2)$、$B(3,-1)$, M 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上任一点, 求 $|AM|+|BM|$ 的最小值. 并求取得最小值时点 M 的坐标.

随机事件的“频率”与“概率”

317000 浙江省临海市回浦中学 狄海鸣

“频率”与“概率”这两个概念是概率统计中的基础性概念. 它们之间联系密切, 但也容易混淆. 概率是一个固定值(0到1之间的常数), 在某次试验中, 事件发生的频率是不可预知的, 是由试验结果而定的一个数(0到1之间的变数). 我们把概率看作是频率的稳定值(即概率意义下的极限值, 并非通常数学中的极限值). 在频率收敛的意义下, 概率可以解释为频率. 这也反映了常量和变量的辩证统一. 但是要学生用“收敛”的意义来理解“频率”与“概率”的关系, 的确有些强人所难.

如果能将这种抽象的关系还原成具体实例, 那么, 我们就容易辨明这两者的联系与区别. 进而为学生学习概率统计带来一个良好的

～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～

学生4: 只要从A点发出的光线射到椭圆上的M点, 反射后经过点B即可, 只要求出点M的坐标.

学生5: 这时反射光线不经过另一焦点……

学生6: 好求, 可以设点M的坐标(x_0,y_0), 利用入射角等于反射角来求.

学生7: 这里是椭圆, 又不是平面镜, 哪里有入射角和反射角?

学生8: 可以设想反射点M处放一个平面镜. 噢——在椭圆上点M处画一条切线. 就有入射角和反射角.

学生9: 对的, 只要求出切线的斜率, 再利用入射角等于反射角, 求出点M的坐标.

怎样求出椭圆的切线斜率?

学生埋头奋笔疾书. 不一会儿, 求得切线的斜率为$k=-\dfrac{9x_0}{25y_0}$.

求法是: 设切线方程$y-y_0=k(x-x_0)$和椭圆方程$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$联立, 消去$y$, 得关于$x$的一元二次方程, 利用判别式为0求得.

这样在点M处的法线斜率为$k=\dfrac{25y_0}{9x_0}$, 利用入射角等于反射角, 建立方程组,

$$\begin{cases}\dfrac{\dfrac{25y_0}{9x_0}-\dfrac{y_0-2}{x_0-2}}{1+\dfrac{25y_0(y_0-2)}{9x_0(x_0-2)}}=\dfrac{\dfrac{y_0+1}{x_0-3}-\dfrac{25y_0}{9x_0}}{1+\dfrac{25y_0(y_0+1)}{9x_0(x_0-3)}},\\ \dfrac{x_0^2}{25}+\dfrac{y_0^2}{9}=1.\end{cases}$$

理论上可求出点M的坐标(过程较繁,略).

通过两位学生的“插嘴”, 把一道常见题加以推广. 通过课堂讨论, 师生多向交流, 不断激活每位学生的“知识宝库”, 能保证思维的连续递进, 促进学生创新精神的发挥.

同学们, 通过这道题目的讨论和联想, 我们继续深入下去, 还能得到什么?

学生10: 如果把A、B两点放在椭圆之外, 能不能求一点M, 使得$|AM|+|BM|$最小.

学生11: 如果把椭圆改成双曲线或抛物线, 类似的结论还成立吗?

对这些问题的探讨, 请同学们课后去作进一步的研究.

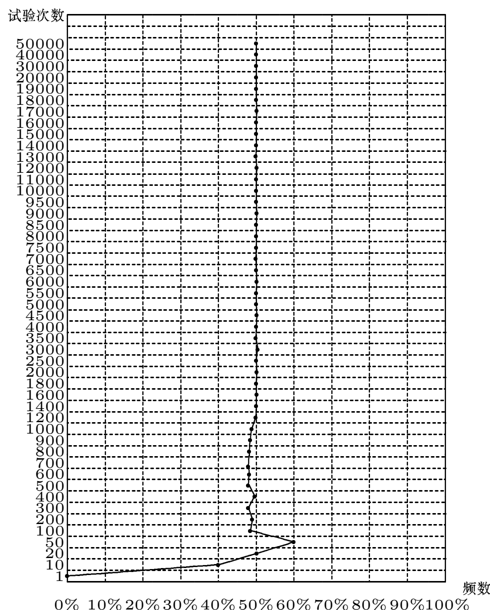
对上述问题的讨论, 并没有见好就收, 而是适时留下思考研究的问题. 让学生课后去探讨.

开端. 以下是笔者借助于Excel设计的一个用于"频率"与"概率"教学的小课件.

首先用Excel中的函数"RAND( )"产生0～ 1(0表示正面)的随机数, 然后用函数"ROUND(RAND( ),0)"返回一个四舍五入到最接近的整数0或1. 用拖动鼠标的方法复制出你想要的任意多的数量(本例中的数量为50000), 如图1. 接着用函数"COUNTIF"返回满足给定条件的单元格的个数. 进而计算出0或1的出现频率, 如表1. 然后用百分比来表示出现0的次数. 应用Excel提供的绘图功能绘制出数据点折线图——抛掷硬币试验频率图. 从图中各数据点所处的位置可知:当试验的次数越来越多的时候, 出现0的频率渐趋稳定.

表1	0	1	试验总次数	出现0的百分比
出现次数	0	1	1	0.00%
出现次数	4	6	10	40.00%
出现次数	10	10	20	50.00%
出现次数	30	20	50	60.00%
出现次数	48	52	100	48.00%
出现次数	98	102	200	49.00%
出现次数	143	157	300	47.67%
出现次数	197	203	400	49.25%
出现次数	238	262	500	47.60%
···	···	···	···	···
出现次数	24991	25009	50000	49.98%

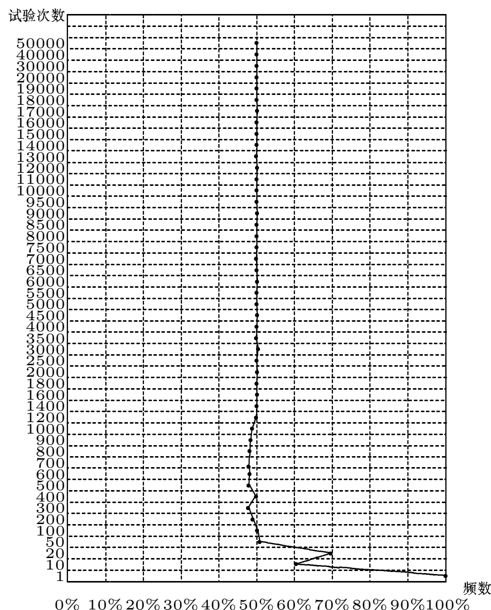
抛掷硬币试验频率图1



再进行一次试验, 得到图2和表2. 然后, 用百分比来表示出现0的次数. 应用Excel提供的绘图功能绘制出第二个数据点折线图. 比较这两个数据点折线图, 我们也可以得到:当试验的次数越来越多的时候, 出现0的频率渐趋稳定, 并且都趋向于50%.

表2	0	1	试验总次数	出现0的百分比
出现次数	1	0	1	100.00%
出现次数	6	4	10	60.00%
出现次数	14	6	20	70.00%
出现次数	29	21	50	58.00%
出现次数	51	49	100	51.00%
出现次数	99	101	200	49.50%
出现次数	146	154	300	48.67%
出现次数	202	198	400	50.50%
出现次数	251	249	500	50.20%
···	···	···	···	···
出现次数	24746	25254	50000	49.49%

抛掷硬币试验频率图2



接着, 多次进行试验, 可以得到多个数据点折线图. 这些图都有这样的规律—当试验的次数越来越多的时候, 出现0的"频率"渐趋稳定, 并且都趋向于50%. 据此, 我们运用归纳的思想可以认为得到出现正面的"概率"为50%.

这种推理需要靠归纳和想象来进行, 它不同于演绎推理. 对于培养概率统计中核心思想——随机性数学思维, 用"试验、归纳"明确"频率"与"概率"这两个概念也是不可多得的好方法.

由一道复数题寻找周围的"蘑菇"

311600 浙江省建德市教师进修学校 徐 军

对于一个好的数学问题, 美国数学教育家G·波利亚有过一个比喻: "好问题同某种蘑菇有些相像, 它们都是成堆地生长的, 找到一个以后, 你应当在周围找一找, 很可能附近就有好几个". 波利亚的比喻形象而生动地说明了数学问题之间存在着紧密联系. 下面我们从一个例子出发, 来探讨在解决了一个数学问题之后, 如何去寻找和解决与之相关的其他数学问题, 并从中去发现这个问题的背后所隐藏的某种规律, 也就是说, 当你幸运地采到第一朵蘑菇之后, 如何去寻找周围更大的蘑菇.

例 (2001年北京春季高考题) 已知$z^7=1\,(z\in\mathbf{C}$且$z\neq 1)$, 设z的辐角为α, 求$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha$的值.

解: 一些学生利用$|z|^2=z\cdot\overline{z}$, 比较容易地解出这道题.

由$z^7=1$, 知$|z|=1$, 故$z\cdot\overline{z}=1$, 由$z\cdot z^6=1$, 得$z^6=\dfrac{1}{z}=\overline{z}$,

同理, $z^5=\overline{z}^2$, $z^3=\overline{z}^4$,

故有$\overline{z+z^2+z^4}=z^6+z^5+z^3$,

又由$z^7=1\,(z\neq 1)$, 得$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\dfrac{1-z^7}{1-z}=0$,

即 $z+z^2+z^4+\overline{z+z^2+z^4}=-1$,

所以$z+z^2+z^4$的实部为$-\dfrac{1}{2}$, 而当z的辐角为α时, 复数$z+z^2+z^4$的实部为 $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha$,

所以 $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

题目是解好了, 但如果就此而结束, 那就太可惜了, 我们不禁要问, 这个结果是偶然的吗? 在它的背后, 是否还隐藏着一些规律性的东西呢? 下面我们从三个方面来探讨.

1. 问题的探索

我们先引导学生从问题的几何背景出发, 用单位圆来分析一下方程的根的分布特点,

分析: 由z^7=1, 知$z=\cos\dfrac{2k\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{7}$, $k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6$.

在复平面内标出和这7个根相对应的7个点, 如图1. 我们可以清楚地看到这个方程的7个根是有规律的, 每相邻两个根的辐角主值之差都为$\dfrac{2\pi}{7}$.

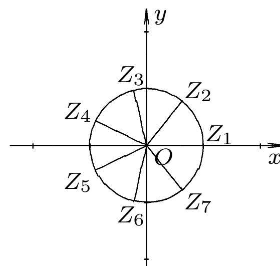


图 1

所以这7个根均匀地分布在单位圆上, 并且是关于x轴对称的, 设α是其中一个根的辐角主值, 则$\alpha=\dfrac{2k\pi}{7}$, $k\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$,

易知有$\cos m\alpha=\cos(7-m)\alpha$, $m\in\mathbf{Z}$,

所以有$\cos\alpha=\cos 6\alpha$, $\cos 2\alpha=\cos 5\alpha$, $\cos 3\alpha=\cos 4\alpha$,

$\because$ $z\neq 1$, $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\dfrac{1-z^7}{1-z}=0$,

$\therefore$ $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha=0$,

$\therefore$ $1+2\cos\alpha+2\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha=0$,

$\therefore$ $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

(当α是z的辐角时, 这个等式显然也成立.)

由上可知, 这个题目之所以恰好可求, 原因在于这个方程的7个根具有上面所分析的特

点, 根据这个道理, 我们就可以将原问题进行推广, 并构造出一些类似的问题来. 如:

若$z^5=1\,(z\in \mathbf{C}$且$z\neq 1)$, 设z的辐角为α, 则有 $\cos\alpha+\cos 3\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

若$z^8=1\,(z\in \mathbf{C}$且$z\neq 1)$, 设z的辐角主值为α, 则$\alpha=\dfrac{2k\pi}{8}$, $k\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

$\because\ 1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha=0$,

$\therefore\ 1+2\cos\alpha+2\cos 2\alpha+2\cos 3\alpha+\cos 4\alpha=0$,

$\because\ \cos 4\alpha=\cos k\pi=(-1)^k$,

$\therefore\ \cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha=\dfrac{(-1)-(-1)^k}{2}$.

我们还可以把这个问题推广到一般的情况.

若$z^n=1\,(z\in\mathbf{C},\ z\neq 1)$, 设$z$的辐角为$\alpha$, 当$n=2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$时,

$\because\ 1+z+z^2+\cdots+z^{2k}=0$,

$\therefore\ 1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos 2k\alpha=0$,

$\because\ \cos\alpha=\cos 2k\alpha,\ \cos 2\alpha=\cos(2k-1)\alpha,\ \cdots,\ \cos k\alpha=\cos(k+1)\alpha$,

$\therefore\ 1+2\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\cdots+2\cos k\alpha=0$,

故有$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos k\alpha=-\dfrac{1}{2}$,

当$n=2k$时, 设z的辐角主值为α, 则$\alpha=\dfrac{2m\pi}{2k}$, $m\in\{1,\cdots,(2k-1)\}$

$\because\ 1+z+z^2+\cdots+z^{2k-1}=0$,

$\therefore\ 1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos(2k-1)\alpha=0$.

又$\because\ \cos\alpha=\cos(2k-1)\alpha,\ \cos 2\alpha=\cos(2k-2)\alpha,\ \cdots,\ \cos(k-1)\alpha=\cos(k+1)\alpha,\ \cos k\alpha=\cos m\pi=(-1)^m$,

$\therefore\ \cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos(k-1)\alpha=\dfrac{(-1)-(-1)^m}{2}$.

至此, 这个问题可以说已经基本解决了, 但是探求还可继续, 如逆向提出问题并加以讨论: 已知$z^n=1\,(z\in\mathbf{C}$且$z\neq 1, n\in\mathbf{N}^*)$, 设$z$的辐角为$\alpha$, 若有$\cos\alpha+\cos 3\alpha=-\dfrac{1}{2}$, 能否求$n$? 我们也可以考虑从原问题出发, 构造出一些类似的三角函数求值问题供学生练习, 如: 求证$\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\dfrac{1}{2}$; 计算$-\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}$的值等等.

2. 寻找蘑菇的一般方法

由上例提的问题实际上只是我们所探求的问题的一小部分或一种特殊情况. 而这种情况在我们数学教学中是常见的, 由于教材篇幅所限, 我们所接触的问题往往只能是一个大问题的一个部分、一个片段或一个特例, 在一个好的问题的背后往往有一批与之相关的问题, 如同一朵蘑菇的周围往往还有成片的蘑菇一样. 解决一个问题也许并不难, 难的是我们该如何引导学生去探究、去发现更多的问题, 笔者认为, 探求问题的具体方法一般是:

(1) 首先要善于选择出一些适合学生的认知水平的典型问题进行挖掘、研究. 通常有些问题貌似简单, 条件和结论之间的联系看起来似乎也是偶然的, 然而, 就是在这偶然性的背后往往存在着必然性, 所以这类问题往往有较为广阔的推广空间, 对这类看起来毫不起眼的基础命题进行横向的拓展和纵向的深入, 逐步把思维的触角伸向问题的深处, 往往能起到“做透一题, 弄通一类”的效果.

(2) 要重视指导学生掌握各种不同的方法, 能从不同数学视角去探索问题, 例如: 寻找问题的几何 (或代数) 背景; 通过设常量为变量拓展问题; 通过引入参量推广问题; 运用逆向思维探求其逆命题; 通过弱化或强化条件与结论, 揭示出它与某类问题的联系与区别, 并变更出新的命题; 用不同的思考方式、不同的数学工具对同一个问题解法进行探索, 寻求多种解法和最佳解法; 把一个在特殊情形、特殊位置上成立的问题换成一般情形、任意位置去研究等等.

总之, 要把那些特殊的、具体的、局部的、低维低次的、平面的、抽象水平弱的问题“进一步”转化为一般的、抽象的、整体的、高维高次的、空间的、抽象水平高的问题来处理, 从而从一朵蘑菇周围发现更多的蘑菇.

一道数列框图问题的探究

202150 上海市崇明中学 徐智愚

说到探究性教学, 大家都这么说: 教师亦应该是整个探究性教学活动过程中的探究者; 同时也要力图做一个组织者、示范者、启发者和鼓励者. 这个提法很不错! 但笔者认为: 关键中之关键恰是, 教师要善于发现、敢于及时地提出问题. 在教学概念、命题(或判断)、推理(或计算)或论证时, 我们往往在一节课中将它们分解为可供学生探究的若干个小问题, 让学生始终处在问题提出——问题探究——问题解决的过程中. 教师不断地提出尖锐的、富于挑战性的问题, 从而引发学生不断讨论, 使学生不断产生探求数学奥妙的强烈愿望, 于是课堂教学高潮迭现. 最近笔者上了一节《一道数列课本习题的探究》公开课, 以下是这堂课的教学实录.

教学过程:

(上海新教材教科书高中一年级第二学期P.120第6题改编), 根据下面的框图, 建立所打印数列的递推关系式, 并写出数列的前4项.

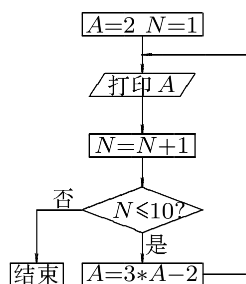


图 1

一、将"$N\leqslant 10$"改为"$N\leqslant 1$", 打印纸上一共打印出几个数据?

T: 打印纸上一共打印出几个数据? 是10个还是11个?

S$_1$: 是11个.

T: (面向全体学生)是11个. 肯定不肯定?

S: (异口同声地)肯定.

T: 现在我将"$N\leqslant 10$"改为"$N\leqslant 1$", 请问现在打印纸上有几个数据?

S$_2$: 数据$A=2$是显然有的. 根据计算机"后入为主"原则, 由$N=1$与$N=N+1$, N变为2, 因为$2\leqslant 1$, NO, 所以结束. 应打印出一个数据为2.

T: 说得好! 那么进一步推广, $N\leqslant M$打印出几个数据?

S$_3$: 由$N\leqslant 1$, 打印出1个数据, 进一步类比, $N\leqslant 10$, 打印出10个数据, $N\leqslant M$打印出M个数据.

二、将"$N\leqslant 10$"改为"$N\leqslant 20$", 写出数列的前20项, 最快的解决途径是什么?

T: 我将"$N\leqslant 10$"改为"$N\leqslant 20$", 打印纸上出现20个数据, 我要你计算出这20个数, 最快的途径是什么?

(学生们跃跃欲试, 热烈讨论, 得出了较多方案 (略).)

S$_4$: 用计算器最快. 可首先按入定数$A=2$; 接着按"$*3-2=$", 连续按"$=$"键, 只须按19次, 即可获得其余19个数.

三、将"$N\leqslant 10$"改为"$N\leqslant 2004$", 写出数列的2004项, 最佳的途径是什么?

T: 我再将'$N\leqslant 10$"改为"$N\leqslant 2004$", 求出该数列的第2004项. 那么用计算器必须得按"$=$"键2003次.

(学生们七嘴八舌, 甲同学、乙同学、丙同学等纷纷举手.)

S$_5$: (上黑板) 由$\begin{cases} a_1=2, \\ a_n=3a_{n-1}-2, \end{cases}$用"设$\lambda$法", 得出$a_n-1=3(a_{n-1}-1)$, 进而求出$a_n=3^{n-1}+1$, 故$a_{2004}=3^{2003}+1$.

四、将“$N\leqslant 2004$”改为“$N\leqslant 10$”，老师写的递推关系式对不对？ 递推关系式是否惟一？

(老师在黑板上写原题的递推关系式，在S_5同学递推关系式

$$\begin{cases}a_1=2\\a_n=3a_{n-1}-2\end{cases}$$

基础上再加上范围$1\leqslant n\leqslant 10$.)

S_6: 老师的递推关系式错了！$n=1$代入变为$a_1=3a_0-2$, 应改为

$$\begin{cases}a_0=2,\\a_n=3a_{n-1}-2\ (1\leqslant n\leqslant 10).\end{cases}$$

S_7: S_6写的递推关系式也错了. 他没有搞清计算机只打印出10个数据. 他的递推关系式共有11个数据!

T: 观察敏锐. 那么应改为

$$\begin{cases}a_0=2,\\a_n=3a_{n-1}-2\ (1\leqslant n\leqslant 9),\end{cases}$$

有没有其它更多的答案?

(学生讨论, 课堂气氛热烈, 学生们很快得出:

$$\begin{cases}a_1=2,\\a_{n+1}=3a_n-2\,(1\leqslant n\leqslant 9);\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1=2,\\a_n=3a_{n-1}-2\,(2\leqslant n\leqslant 10);\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_0=2,\\a_n=3a_{n-1}-2\,(1\leqslant n\leqslant 9).\end{cases}$$

等等许多不同答案.)

五、将“$A=3*A-2$”改成“$A=3*A-2^N$”能否求出通项公式?

S_8:
$$\begin{cases}a_1=2,\\a_{n+1}=3a_n-2^n,\end{cases}$$

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{a_n}{2^n}-\dfrac{1}{2}$, 换元得$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$, 得出$b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n-\dfrac{1}{2}$, 转化为“设$\lambda$法”求之.

T: 转化得好!

S_9: S_8的思路是对的. 但用刚才“退化”的思想, 取$n=1$, 则$a_2=3a_1-2$, 应该为$a_2=3a_1-2^2$, $a_3=3a_2-2^3$, $\cdots$ 应该“同步”!

T: 好一个“退化”与“同步”! 观察敏锐. 说得好! 那么递推关系式应为

$$\begin{cases}a_1=2,\\a_{n+1}=3a_n-2^{n+1}.\end{cases}$$

因为“同步”.

六、“死循环”问题的内核是什么? 有否多种解法?

T: 同学甲利用数列$\{a_n\}$(其中$a_n=1+3^{n-1}$), 设计了一个程序, 如图2, 同学乙认为这个程序如果被执行将会是一个“死循环”, 即一般情况下, 程序会永远循环下去而无法结束, 但打印纸上一个数据也没有. 你是否赞同乙同学的观点? 请你说明理由.

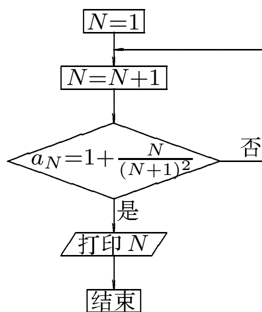


图 2

(此时同学们处于“愤”“悱”境地, 分组讨论, 课堂气氛极其热烈.)

S_{10}: 是“死循环”, 问题转化为方程:

$$1+3^{N-1}=1+\frac{N}{(N+1)^2}$$

有没有解的问题. 即$3^{N-1}=\dfrac{N}{(N+1)^2}$, 因为$N\geqslant 1$, 所以$3^{N-1}\geqslant 1$, 又$\dfrac{N}{(N+1)^2}<\dfrac{N}{N+1}<1$, 故矛盾, 方程无解.

S_{11}: 还有一种解法. 原式变为

$$\frac{1}{3^{N-1}}=\frac{(N+1)^2}{N},$$

$$\frac{1}{3^{N-1}}=\frac{N^2+2N+1}{N}=N+\frac{1}{N}+2,$$

由基本不等式$N+\dfrac{1}{N}+2\geqslant 4$, 但$\dfrac{1}{3^{N-1}}\leqslant\dfrac{1}{3}$, 故无解.

(教室静, 一些学生窃窃私语.)

S_{12}: 原题有隐含条件$N\geqslant 2$. 我是这样

一道三角函数求值题的探究及思考

312000　浙江省绍兴市高级中学　阮伟强

由于一时疏忽, 在一堂高三数学复习课中, 笔者没对下列习题细加研究, 就呈现给了学生. 这样, 意外就发生了……

习题　已知向量 $\overrightarrow{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\overrightarrow{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$, $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\dfrac{\sqrt{26}}{13}$.

(1) 求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值;

(2) 若 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$, 且 $\sin\beta=-\dfrac{3}{5}$, 求 $\cos\alpha$ 的值.

习题抛出后, 一切似乎显得很正常. 不久, 学生就给出了解答过程.

解: (1) ∵ $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\dfrac{\sqrt{26}}{13}$,

∴ $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$

解的, 易知 $3^{N-1}=\dfrac{1}{N+\dfrac{1}{N}+2}$, 因为 $N\geqslant 2$, 推得 $3^{N-1}\geqslant 3$, 由函数单调性易知 $f(N)=N+\dfrac{1}{N}$ 单调递增, 故

$$\frac{1}{N+\dfrac{1}{N}+2}\leqslant\frac{1}{2+\dfrac{1}{2}+2}=\frac{2}{9},$$

矛盾, 无解.

T: 说得太好了! 同学们再讨论一下, 还有没有其它解法?

S_{13}: 我是用图象法解的.

由 $3^{N-1}=\dfrac{N}{(N+1)^2}$, 转化为 $\dfrac{1}{3^{N-1}}-2=N+\dfrac{1}{N}$, 令 $y=\dfrac{1}{3^{N-1}}-2$ 与 $y=N+\dfrac{1}{N}$ ($N\geqslant 2$, N 为自然数), 即转化两图象有无交点问题.

如图3, $y=N+\dfrac{1}{N}$ 单调递增, $y=\dfrac{1}{3^{N-1}}-2$ 单调递减.

$A_1\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$、$A_2\left(3,\dfrac{10}{3}\right)$、$A_3\left(4,\dfrac{17}{4}\right)$、…; $B_1\left(2,-\dfrac{5}{3}\right)$、$B_2\left(3,-\dfrac{17}{9}\right)$、$B_3\left(4,-\dfrac{53}{27}\right)$、… 无公共点, 故无解.

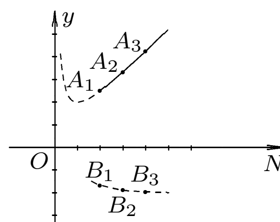


图 3

T: 太妙了! 本题的内核即判断一个超越方程有解与无解的问题. 讨论一下, 你们更喜欢哪一种方法? 哪一种解法更具有一般性, 更能揭示超越方程有解性的内核?

S_{14}: 我喜欢 S_{10} 的解法, 巧妙、简单.

S_{15}: 我认为 S_{13} 的解法更具有一般性, 且用了数形结合的思想方法.

T: 我与 S_{15} 有同感. S_{12} 与 S_{13} 的解法有异曲同工之妙, 但他们解法的内核均是函数的单调性. 数列是其定义域为自然数的一种特殊的函数, 故其图象为一系列孤立、离散的点, 只须观察图象有无公共点即可. 函数的单调性知道, 函数的图象也知道, 故判断超越方程有解性问题的一种极其重要的一般求法是函数的单调性 (包括图象法).

(下课铃声响, 同学们还在热烈地讨论, 脸上都露出了愉快的微笑与成功的喜悦…….)

$= \left(\frac{\sqrt{26}}{13}\right)^2$,

$\therefore$ $2-2\cos(\alpha-\beta)=\frac{2}{13}$, 即

$\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$.

(2) $\because$ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$,

$\therefore$ $0<\alpha-\beta<\pi$,

$\therefore$ $\sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$.

$\because$ $\sin\beta=-\frac{3}{5}$,

$\therefore$ $\cos\beta=\frac{4}{5}$,

$\therefore$ $\cos\alpha=\cos[(\alpha-\beta)+\beta]$

$=\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta$

$=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}-\frac{5}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{63}{65}$.

接着, 笔者想引导学生运用数形结合的思想来完成本题的解答. 突然, 一个学生从座位上站了起来, 大声说:"这是一道错题." 教室里像炸开了锅似的, 变得特别热闹. 见此情景, 笔者一方面要求学生安静, 一方面请该同学来谈谈自己的想法. "我先求了$\sin\alpha$的值, 发现为负值, 这是不可能的!" 接着, 他展示了求解过程: $\sin\alpha=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta=\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{16}{65}$,

这与$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$互相矛盾.

此时, 教室里显得十分安静, 大家纷纷向该同学投去敬佩、羡慕的目光. 那么, 接下来怎么办? 我想不如和学生一起进行探究, 共同来探寻错误的根源, 并把错题改成正题. 在教师的启发下, 学生想到利用向量的直观解释来研究. 如图1所示, 向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$的终点A、B落在单位圆上, 且$|BA|=\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\frac{\sqrt{26}}{13}$, 若向量$\overrightarrow{b}$确定, 则向量$\overrightarrow{a}$对称分布在它的两侧. 现算得$\cos\angle AOB=\frac{12}{13}>\frac{3}{5}$, 因此,

$\angle AOB<\arccos\frac{3}{5}<\arcsin\frac{3}{5}$,

所以向量$\overrightarrow{a}$必落在第四象限. 这样, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$是不可能的.

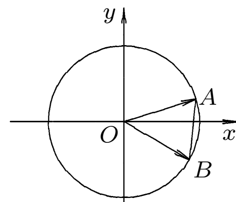


图 1

找到了错误的根源, 学生都显得兴奋异常, 脸上洋溢着成功的喜悦和愉快. 接下来, 学生都渴望适当改变题设中的条件, 把错题改成正题. 为此, 笔者要求学生以学习小组为单位, 相互协作、探讨, 完成改题工作, 然后, 请代表发言, 展示获得的成果.

生1: 把α的范围改为$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$, 题目就完美了, 但$\cos\alpha$的解有两个, 分别是$\frac{63}{65}$或$\frac{33}{65}$.

生2: 把$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$的值改成大于$\frac{\sqrt{10}}{5}$且小于$\frac{4\sqrt{5}}{5}$, 其它条件不变, 题目也完美了, 此时$\cos\alpha$的值惟一.

生3: 把$\sin\beta$的值改成大于$-\frac{5}{13}$且小于0, 其它条件不变, 题目同样完美, 此时$\cos\alpha$的值惟一.

由于笔者不经意中向学生呈现了一道错题, 却收到了意想不到的效果, 在暗自庆幸之余, 产生一个想法, 在习题教学中, 我们能不能故意留一点"空白"走进课堂, 以便让学生有更大的成长空间?

(上接封底)

牌是激励, 还不是成功. 如果把奥赛获奖者当作明星般处理, 人才也就被"捧"杀了. 何忆捷同学不断地学习, 不仅做别人的题, 自己也编题. 不仅熟悉奥数训练过的套路, 也能将奥数和高等数学学习结合起来. 摆正位置, 力求创新, 未来属于勤奋工作的青年. 愿何忆捷同学的金牌之路越走越好.

圆锥曲线中一条命题链的探究

312008 浙江省绍兴县鲁迅中学 张惠民

本文是根据笔者前不久开设的一堂高三数学公开课整理而成的. 整堂课以问题为主线, 支撑起学生积极的探究活动, 展现命题的逐级演变过程. 同学们饶有兴趣, 有的同学不由自主地说:"啊! 原来数学中的一些结论是这么来的". 课后同学们余兴不减, 较顺利地完成了后续探究. 教学设计达到了如期效果. 以下是本课时教学设计的主体思路.

1. 从高考试题引入

以前我们接触过2001年的一个高考题: 如图1, AB为抛物线$y^2=2px$中过焦点F的一条弦, BC平行于x轴并交准线l于点C, 求证: A、O、C三点共线.

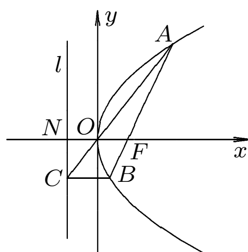


图 1

今天我们再来进行一些探讨.

2. 逆命题成立吗

若记: (1) A、F、B共线, (2) $BC/\!/x$轴, (3) A、O、C共线. 则上题的主体结构是由(1)、(2)成立推证(3)亦成立. 由此很自然地联想到其逆命题成立吗? 即

猜想1: 如图1, AB为抛物线$y^2=2px$的一条弦, C为准线l上一点, A、O、C三点共线, BC平行于x轴, F为抛物线的焦点, 那么A、F、B三点共线吗?

猜想2: AB为抛物线$y^2=2px$中过焦点F的一条弦, C为准线l上一点, A、O、C三点共线, 那么BC平行于x轴吗?

(证明由学生自主完成.)

3. 可以类比到椭圆上吗

上例中点F和O分别为抛物线的焦点和顶点, 由此产生类比联想:能把抛物线中的结论移植到椭圆中吗? 例如

猜想3: AB为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$中过左焦点$F$的一条弦, BC平行x轴并交左准线l于C点, D为左顶点, 那么A、D、C三点共线吗?

4. 引申碰到了问题

对猜想3, 先以椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$中的一条特殊的弦"通径"加以检验, 如图2, $A\left(-3,\dfrac{16}{5}\right)$、$D(-5,0)$、$C\left(-\dfrac{25}{3},-\dfrac{16}{3}\right)$, 因为$k_{AD}\neq k_{DC}$, 故$A$、$D$、$C$三点不共线.

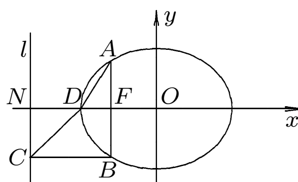


图 2

评注: 对待猜想, 最好先用特例加以检验, 以避免证明上的盲目性.

5. 问题出在哪里

反思: 观察比较图1和图2, 可发现一个本质上的差异: 在图1中, O为线段NF的中点, 而在图2中, 点D却不是如此. 这是否就是导致命题不能引申的直接原因呢?

校正: 现设定D为线段NF的中点.

由此得到新的猜想.

猜想4: 如图3, AB为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$中过焦点$F$的一条弦, BC平行x轴并交相应准

线l于点C, 该准线与x轴交于点N, D为线段NF的中点. 那么A、D、C三点共线吗?

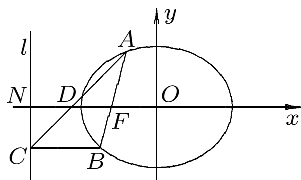


图 3

6. 猜想4的证明

直线AB过点F, 设方程为$x=ky-c$,

代入$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$并整理得:

$(k^2b^2+a^2)y^2-2kcb^2y-b^4=0$.

设$A(ky_1-c,y_1)$, $B(ky_2-c,y_2)$,

则$C\left(-\dfrac{a^2}{c},y_2\right)$, 又$D\left(-\dfrac{a^2+c^2}{2c},0\right)$, 而

$$y_1+y_2=\frac{2kcb^2}{k^2b^2+a^2},$$

$$y_1y_2=\frac{-b^4}{k^2b^2+a^2},$$

$$\overrightarrow{DA}=\left(ky_1-c+\frac{a^2+c^2}{2c},y_1\right)=\left(ky_1+\frac{b^2}{2c},y_1\right),$$

$$\overrightarrow{DC}=\left(-\frac{a^2}{c}+\frac{a^2+c^2}{2c},y_2\right)=\left(-\frac{b^2}{2c},y_2\right),$$

$$\left(ky_1+\frac{b^2}{2c}\right)y_2+\frac{b^2}{2c}y_1$$

$$=ky_1y_2+\frac{b^2}{2c}(y_1+y_2)$$

$$=k\cdot\frac{-b^4}{k^2b^2+a^2}+\frac{b^2}{2c}\cdot\frac{2kcb^2}{k^2b^2+a^2}$$

$$=0.$$

所以A、D、C三点共线.

7. 焦点可以被替换吗

猜想5: 图3中若点F由长轴上一般的点$M(m,0)$来替换, D相应地改为线段MN的中点, 其他条件不变, 那么A、D、C三点仍共线吗?

在椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$中取过点$M(4,0)$且垂直于长轴的弦$AB$进行检验, 发现结论并不成立.

8. 准线可以被替代吗

猜想6: 图3中准线由垂直于长轴的一般直线l来替代, 其他条件不变, 那么A、D、C三点仍共线吗?

取AB为椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$中的“通径”, 直线$l$为: $x=6$进行检验, 发现结论也不成立.

9. 点线必须连动

反思: 图3中椭圆的左准线为$x=-\dfrac{a^2}{c}$, 左焦点为$F(-c,0)$, 当a固定, c变化时, 显然焦点和准线是连动的. 而猜想5、6中只变更了一个点(或一条线), 则无形中破坏了点线连动的和谐关系.

校正: 若设$M(m,0)$, 则l相应地应变为$x=\dfrac{a^2}{m}$. 由此得到又一个猜想:

猜想7: 如图4, AB为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$中过点$M(m,0)$ ($m\neq\pm a$, $m\neq 0$)的一条弦, 直线$l:x=\dfrac{a^2}{m}$与x轴相交于点N, BC平行于x轴并交直线l于点C, D为线段MN的中点, 那么A、D、C三点共线吗?

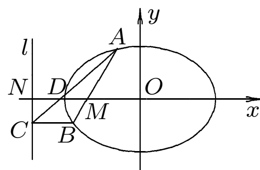


图 4

(与猜想4的证明无本质区别.)

10. 对称轴可以被替换吗

图4中, M、D、N三点取在椭圆的长轴上, 那么可以挪位到短轴上吗? 注意到a与b的变迁, 由此萌发新的猜想:

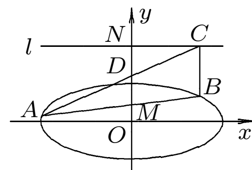


图 5

(下转第4–36页)

公差“d”与公比“q”用法新说

222300 江苏省东海高级中学 翟小军

d与q通常分别用来表示等差数列的公差和等比数列的公比,这两个量也是数列中的基本量. 本文将从其他数学问题中由题设挖掘出公差d或公比q的影子,并将其进行适当地构造,在“问题”和数列之间架设一座“桥梁”,为公差d与公比q的应用开辟了新天地.

例1 用d来解无理方程:

解方程$\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3}$.

解: 此方程x的允许值范围为$1\leqslant x\leqslant 3$,在此范围内,由所求方程可知 $\sqrt{3-x}$、$\frac{\sqrt{3}}{2}$、$\sqrt{x-1}$成等差数列.

设公差为d,则有 $\sqrt{3-x}=\frac{\sqrt{3}}{2}-d$,$\sqrt{x-1}=\frac{\sqrt{3}}{2}+d$,将两式平方后相加,得$2=\frac{3}{2}+2d^2$,即$d^2=\frac{1}{4}$,∴ $d=\pm\frac{1}{2}$. 由$d=\frac{1}{2}$代入$\sqrt{3-x}=\frac{\sqrt{3}}{2}-d$,得$\sqrt{3-x}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$,即$x=\frac{4+\sqrt{3}}{2}$;由$d=-\frac{1}{2}$代入$\sqrt{3-x}=\frac{\sqrt{3}}{2}-d$,得$\sqrt{3-x}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,即$x=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$.

∵ $1<\frac{4\pm\sqrt{3}}{2}<3$,故$\frac{4\pm\sqrt{3}}{2}$为所求的两根.

例2 用d解无理方程组:

求方程组$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y-1}=5 & ①\\ xy-x=36 & ②\end{cases}$的实数解.

解: 由方程①知,$\sqrt{x}$、$\frac{5}{2}$、$\sqrt{y-1}$成等差数列,故令$\sqrt{x}=\frac{5}{2}-d$,$\sqrt{y-1}=\frac{5}{2}+d$,则$x=\left(\frac{5}{2}-d\right)^2$,$y-1=\left(\frac{5}{2}+d\right)^2$,将$x$、$y-1$代入②,得$\left(\frac{5}{2}-d\right)^2\cdot\left(\frac{5}{2}+d\right)^2=36$,并由此求得$d=\pm\frac{1}{2}$及$d=\pm\frac{7}{2}$(舍去). 若$d=\frac{1}{2}$,则$x=4$,$y=10$;若$d=-\frac{1}{2}$,则$x=9$,$y=5$.

∴ 方程组的解为$\begin{cases}x=4,\\ y=10,\end{cases}$或$\begin{cases}x=9,\\ y=5.\end{cases}$

点评: 解无理方程组,为了避免两次乘方,所以先构造等差数列,然后用数列性质求解,使得问题简单化了.

例3 用d研究不定方程:

设实数x、y、z满足

$$\begin{cases}x^2-yz-8x+7=0, & ①\\ y^2+z^2+yz-6x+6=0. & ②\end{cases}$$

求x的取值范围.

解: 由①得$yz=x^2-8x+7$,由②得$(y+z)^2=yz+6x-6=x^2-2x+1=(x-1)^2$,∴ y、$\pm\frac{x-1}{2}$、z成等差数列,令$y=\pm\frac{x-1}{2}+d$,$z=\pm\frac{x-1}{2}-d$,代入①,得$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-d^2=x^2-8x+7$,即$3x^2-30x+27=-d^2$,∴ $x^2-10x+9\leqslant 0$,解得$1\leqslant x\leqslant 9$.

点评: 本题是由不定方程组求x的范围的问题,关键是建立一个关于x的不等式,但在方程组中没有明显的数列模型,所以通过①、②的结合来构造等差数列,使得问题明朗化了.

例4 用d研究最大(小)值问题:

确定最大的实数z,使得$x+y+z=5$,$xy+yz+zx=3$,并且x、y也是实数.

解: ∵ $x+y=5-z$,∴ x、$\frac{5-z}{2}$、y成等差数列,令$x=\frac{5-z}{2}+d$,$y=\frac{5-z}{2}-d$,代入$xy+yz+zx=3$,

得$\left(\frac{5-z}{2}+d\right)\left(\frac{5-z}{2}-d\right)$
$+\left(\frac{5-z}{2}-d\right)z+z\left(\frac{5-z}{2}+d\right)=3.$

整理得$3z^2-10z-13=-4d^2$, ∴ $3z^2-10z-13\leqslant 0$, 解得$-1\leqslant z\leqslant\frac{13}{3}$, 又当$x=y=\frac{1}{3}$时, $z=\frac{13}{3}$, ∴ 最大的实数$z=\frac{13}{3}$.

例5 d在三角中的应用:

已知$2\cos\theta+\sin\theta=1$, 求$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$的值.

解: 由题设知$2\cos\theta$、$\frac{1}{2}$、$\sin\theta$成等差数列, 设$2\cos\theta=\frac{1}{2}-d$, $\sin\theta=\frac{1}{2}+d$, 由$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, 得$\left(\frac{1}{2}+d\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{d}{2}\right)^2=1$, 解得$d=\frac{1}{2}$或$-\frac{11}{10}$, 又因$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{-1-6d}{3+2d}$, 把$d=\frac{1}{2}$或$-\frac{11}{10}$代入上式, 得$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=-1$或7.

例6 q在代数中的应用:

已知x、y、$z\in\mathbf{R}^+$, 且$x^2+y^2=z^2$, $z\sqrt{x^2-r^2}=x^2$, 求证: $xy=rz$.

证明: 由$z\sqrt{x^2-r^2}=x^2$, 得$z^2(x^2-r^2)=x^4$, 即z^2、x^2、x^2-r^2成等比数列. 令$z^2=\frac{x^2}{q}$, $x^2-r^2=x^2q$, 则$y^2=z^2-x^2=\frac{x^2}{q}-x^2=x^2\cdot\frac{1-q}{q}$, $r^2=x^2(1-q)$, ∴ $\frac{y^2}{r^2}=\frac{1}{q}=\frac{z^2}{x^2}$, 故$xy=rz$.

点评: 本题解法抓住$z\sqrt{x^2-r^2}=x^2$的特征, 构造等比数列, 再由已知$x^2+y^2=z^2$, 把y^2、z^2、r^2都用x^2的式子来表示, 由此得出$x^2y^2=r^2z^2$, 最终使等式获证.

例7 q在三角函数中的应用:

已知$\sin\varphi\cdot\cos\varphi=\frac{60}{169}$, 且$\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 求$\sin\varphi$、$\cos\varphi$的值.

解: 依题意$\sin\varphi$、$\frac{2\sqrt{15}}{13}$、$\cos\varphi$成等比数列, 设$\sin\varphi=\frac{2\sqrt{15}}{13q}$, $\cos\varphi=\frac{2\sqrt{15}}{13}q$, 由$\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{2}$知$0<q<1$.

由$\left(\frac{2\sqrt{15}}{13q}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{15}}{13}q\right)^2=1$, 可得$q=\frac{\sqrt{15}}{6}$, ∴ $\sin\varphi=\frac{12}{13}$, $\cos\varphi=\frac{5}{13}$.

点评: 本题有很多种解法, 大多按三角公式、三角恒等式去变形得解, 本题解法是从条件中发现了等比数列的"影子", 所以构造出相应的等比数列, 应用数列性质来解决问题.

例8 在$\triangle ABC$中, $\lg\tan A+\lg\tan C=2\lg\tan B$, 求证: $\frac{\pi}{3}\leqslant B<\frac{\pi}{2}$.

证明: 由题设知$\tan A$、$\tan B$、$\tan C$均为正数, 且A、B、C为锐角, $\tan A$、$\tan B$、$\tan C$成等比数列, 故设$\tan A=\frac{1}{q}\tan B$, $\tan C=q\tan B$ $(q>0)$, 则$\tan A+\tan C=\left(q+\frac{1}{q}\right)\tan B$. 另一方面, $\tan A+\tan C=\tan(A+C)(1-\tan A\tan C)=-\tan B(1-\tan^2 B)$, 故$-\tan B(1-\tan^2 B)=\left(q+\frac{1}{q}\right)\cdot\tan B$, 即$\tan^2 B=q+\frac{1}{q}+1\geqslant 3$, 于是$\tan B\geqslant\sqrt{3}$, 当且仅当$q=1$, 即$A=B=C=\frac{\pi}{3}$时取等号. 因$y=\tan B$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是增函数, 所以$\frac{\pi}{3}\leqslant B<\frac{\pi}{2}$.

例9 化简
$$\frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}+\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}.$$

分析: 本题没有明显的模型"$ac=b^2$", 但根据分子分母各项的关系, 可构造等比数列的基本型的公比q的使用条件.

解: 由题意得$\sin x\neq 0$, 且$ac=b^2$, 知$1-\cos x$、$\sin x$、$1+\cos x$成等比数列, 故设$1-\cos x=\frac{1}{q}\sin x$, $1+\cos x=q\sin x$, 则原式$=$
$$\frac{(1+q)\sin x}{\left(1+\frac{1}{q}\right)\sin x}+\frac{\left(1+\frac{1}{q}\right)\sin x}{(1+q)\sin x}=q+\frac{1}{q}=\frac{1+\cos x}{\sin x}+\frac{1-\cos x}{\sin x}=2\csc x.$$

用构造法思想解三角函数题

412000 湖南省株洲市第八中学 郭红恩

"构造法"是指: 为解决某个问题时先构造一种数学形式(如几何图形、代数式、方程式等), 寻求与问题的某种内在联系, 使之直观明了, 起到化简、转化和桥梁作用, 从而找到解决问题的思路、方法. 此法重在"构造"、深刻分析、正确思维和丰富联想. 它体现了数学中发现、类比、化归的思想, 渗透着猜想、试验、探索、概括等重要的数学方法; 是一种富有创造性的解决问题的方法.

三角问题千变万化, 题型丰富, 某些问题的解答技巧性强, 如果只用常规方法去处理可能很繁杂, 甚至难以奏效. 若能根据题设条件和题型结构特点, 恰当地运用构造法, 能使问题迎刃而解.

一、构造几何图形解三角题

"构图"是构造法中的一个重要方面; 如能挖掘三角问题中所具有的图形特征, 正确有效地构造几何图形, 明确反映各量之间的关系, 就能准确快速地作出解答.

例1 θ、φ均为锐角, 且$\theta+\varphi<\dfrac{\pi}{2}$. 化简$\cos^2\varphi+\cos^2(\theta+\varphi)-2\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot\cos(\theta+\varphi)$.

分析: 构造外接圆直径为1且三内角分别为$90^\circ+\varphi$、$90^\circ-(\theta+\varphi)$、$\theta$的三角形, 则由余弦定理得: 原式 $=\sin^2(90^\circ+\varphi)+\sin^2[90^\circ-(\theta+\varphi)]-2\sin(90^\circ+\varphi)\cdot\sin[90^\circ-(\theta+\varphi)]\cdot\cos\theta=\sin^2\theta$.

例2 已知锐角α、β、γ满足$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. 求证: $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqslant3\sqrt{2}$.

分析: 构造长、宽、高分别为a、b、c的长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$(如图1), 使其对角线AC_1与棱AB、AD、AA_1的夹角分别为α、β、γ, 显然锐角α、β、γ满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

且$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}$, $\tan\beta=\dfrac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}$, $\tan\gamma=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$,

$$\begin{aligned}\therefore\ &\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\\ &=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}+\frac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\\ &\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\right]\\ &\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(2+2+2)\\ &=3\sqrt{2}.\end{aligned}$$

当且仅当$a=b=c$, 即$\alpha=\beta=\gamma$时, 等号成立.

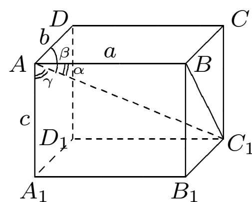


图 1

例3 设x、y、z为实数, 且$0<x<y<z<\dfrac{\pi}{2}$. 求证: $\sin2x+\sin2y+\sin2z<\dfrac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z$.

分析: 只须证$\sin x\cos x+\sin y\cos y+\sin z\cos z<\dfrac{\pi}{4}+\sin x\cos y+\sin y\cos z$.

构造单位圆$x^2+y^2=1$, 则$A(\cos x,\sin x)$、$B(\cos y,\sin y)$、$C(\cos z,\sin z)$为圆上的三点(如图2).

设图中三个矩形面积分别为S_1、S_2、S_3, 则$\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y(\cos y-\cos z)+\sin z\cdot\cos z=S_1+S_2+S_3<\dfrac{\pi}{4}$.

因此, 原不等式成立.

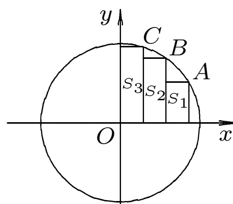


图 2

二、构造代数(或函数)式解三角题

数学美无处不在, 三角函数中尤其如此, 可结合教材本身的特点, 对学生进行审美观教育, 对称美在数学解题中具有重要作用, 在构造代数式或函数式解题时, 常构造"对偶式"、"对称式", 有利于重组问题中各元素, 汇聚题目条件, 收到事半功倍的效果.

例4 求$\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°$的值.

分析: 设$x=\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cdot\cos 50°$, 构造$x$的对偶式$y=\cos^2 20°+\sin^2 50°+\cos 20°\sin 50°$, 则$x+y=2+\sin 70°$, $x-y=-\cos 40°+\cos 100°-\sin 30°=-\frac{1}{2}-\sin 70°$, ∴ $x=\frac{3}{4}$.

例5 求证 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

分析:设$A=\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$, $B=\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}$.

令$z=\cos\frac{\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}$, 易知$z^7=-1$, 且$z^3\neq-1$, 则$A+B\mathrm{i}=z-z^2+z^3=\frac{z(1+z^3)}{1+z}=\frac{z(1+z^3)}{-z^7+z}=\frac{1+z^3}{1-z^6}=\frac{1}{1-z^3}=$

$$\frac{1}{1-\cos\frac{3\pi}{7}-\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{7}}=\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{2\left(1-\cos\frac{3\pi}{7}\right)}\mathrm{i},$$

∴ $A=\frac{1}{2}$.

三、构造方程解三角题

对于某些三角求值问题, 直接计算很难入手, 可运用根与系数的关系, 联想构造一元二次方程来求解.

例6 求$\sin 18°$和$\cos 36°$的值.

分析: ∵ $\sin 18°\cdot\cos 36°=\frac{\sin 36°\cdot\cos 36°}{2\cos 18°}=\frac{\sin 72°}{4\cos 18°}=\frac{1}{4}$, $-\sin 18°+\cos 36°=\sin 54°-\sin 18°=2\cos 36°\cdot\sin 18°=\frac{1}{2}$,

∴ $-\sin 18°$和$\cos 36°$是一元二次方程$x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0$的两根. 解这个方程得$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

又 ∵ $0<\sin 18°<\cos 36°$, ∴ $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 36°=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

四、构造几何背景解三角题

某些问题具有几何背景, 用常规方法较难解决, 而类比构造其几何意义, 运用数形结合的数学思想, 直观地反映元素之间的关系, 使问题快速获解.

例7 求函数$f(x)=\frac{1-\sqrt{2}\sin x}{4-\sqrt{2}\cos x}$的最大、最小值.

分析: 考虑定点$P(4,1)$和动点$A(\sqrt{2}\cos x,\sqrt{2}\sin x)$, 则$f(x)=k_{PA}$, 动点$A$在圆$O$: $x^2+y^2=2$上, $f(x)$的最值对应过定点P且与圆O相切的直线斜率.

∴ $f(x)_{\max}=\frac{4+\sqrt{30}}{14}$,

$f(x)_{\min}=\frac{4-\sqrt{30}}{14}$.

五、构造解析几何模型解三角题

对各量关系不明确的问题, 创造性地构造与之相关的解析几何模型, 凸现各元素之间的内在联系, 揭示问题的实质, 使问题变得简单明了.

例8 已知$\sin A+\sin(A+B)+\cos(A+B)=\sqrt{3}$, $B\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$, 求$B$的值.

分析: 由已知可得$(\sin B+\cos B)\cos A+(1+\cos B-\sin B)\sin A-\sqrt{3}=0$.

考虑直线$(\sin B+\cos B)x+(1+\cos B-\sin B)y-\sqrt{3}=0$及圆$x^2+y^2=1$, 显然点$(\cos A,\sin A)$既在直线上又在圆上, 所以, 圆心$O(0,0)$到直线的距离$d\leqslant 1$.

$$\therefore\ \frac{|0+0-\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sin B+\cos B)^2+(1+\cos B-\sin B)^2}}$$

对函数问题的错解剖析

341400 江西省南康中学 申其华

函数是高中数学中极为重要的内容, 综观近几年来的高考试题, 主要考查的内容有:函数的概念及性质, 函数的图象及变换, 这是学生学习的重点, 也是难点. 下面剖析学生在学习过程中, 常因概念不清而易混淆的几组函数问题.

一、奇偶性问题

例1 (1) 已知函数 $y=f(x)$ 为偶函数, 则有 ……………………………………………………( )

(A) $f(x+1)=f(-x-1)$;

(B) $f(x+1)=f(-x+1)$.

(2) 已知函数 $y=f(x+1)$ 为偶函数, 则有 ……………………………………………………( )

(A) $f(x+1)=f(-x+1)$;

(B) $f(x+1)=f(-x-1)$.

(3) 已知函数 $y=f(x)$ 为奇函数, 则有 ……………………………………………………( )

(A) $f(x+1)=-f(-x-1)$;

(B) $f(x+1)=-f(-x+1)$.

(4) 已知函数 $y=f(x+1)$ 为奇函数, 则有 ……………………………………………………( )

(A) $f(x+1)=-f(-x+1)$;

(B) $f(x+1)=-f(-x-1)$.

剖析:上面四个选择题,正确答案为(A),学生易误选(B), 原因是对奇(偶)函数的概念理解不透所致. 对奇偶性的理解, 应从以下几方面着手: ① 定义域要关于原点对称; ② 函数 $y=f(x)$ 中的对应法则"f"是对整体变量 x 的作用; ③ 对定义域中的任意 x, 恒有 $f(-x)=f(x)$ (或 $f(-x)=-f(x)$) 成立.

对于(1), $\because$ $y=f(x)$ 为偶函数,

$\therefore$ $f(-x)=f(x)$.

把 $x+1$ 视为整体变量, 令 $t=x+1$, 则 $f(-t)=f(t)$, 即 $f(x+1)=f(-x-1)$, 选(A).

对于(2), $y=f(x+1)$ 是对应法则 f 对整体变量 $x+1$ 的作用, 设作用后关于 x 的函数为 $g(x)$, 则 $f(x+1)=g(x)$,

$\because$ $y=f(x+1)=g(x)$ 为偶函数,

$\therefore$ $g(x)=g(-x)$,

即 $f(x+1)=f(-x+1)$, 选(A).

同理分析(3)、(4).

应用:函数 $y=f(x)$ 在区间(0,2)上是增函数, $y=f(x+2)$ 为偶函数, 则下列结论正确的是 ……………………………………………………( )

(A) $f(1)<f\left(\dfrac{9}{4}\right)<f\left(\dfrac{10}{3}\right)$;

(B) $f\left(\dfrac{10}{3}\right)<f\left(\dfrac{9}{4}\right)<f(1)$;

(C) $f\left(\dfrac{10}{3}\right)<f(1)<f\left(\dfrac{9}{4}\right)$;

(D) $f\left(\dfrac{9}{4}\right)<f(1)<f\left(\dfrac{10}{3}\right)$.

分析: $\because$ $y=f(x+2)$ 为偶函数,

$\therefore$ $f(-x+2)=f(x+2)$,

$\leqslant 1 \Longrightarrow \cos B \geqslant \sin B$.

又 $\because$ $B\in\left[\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$, $\therefore$ $\sin B\geqslant\cos B$, 故 $\sin B=\cos B$, $\therefore$ $B=\dfrac{\pi}{4}$.

三角函数是中学数学的重要内容之一, 其特点是脉络清晰、结构严谨、公式众多, 解题方法技巧性强, 数学思想要求高, 而且与其它数学分支联系紧密. 构造法为揭示这种内在联系提供了方法上的保证, 有意识地进行训练, 能加深学生对所学知识的理解, 提高学生运用知识解决问题的能力.

$\therefore$ $y=f(x)$关于直线$x=2$对称, 选(C).

二、复合(抽象)函数定义域问题

例2 (1) 已知函数$y=f(x)$的定义域为[0,1], 求函数$y=f(2x+1)$的定义域.

(2) 已知函数$y=f(2x+1)$的定义域为[0,1], 求函数$y=f(x)$的定义域.

(1) 错解: $\because$ $y=f(x)$定义域为[0,1],

$\therefore$ $0\leqslant x\leqslant 1$,

$\therefore$ $1\leqslant 2x+1\leqslant 3$,

$\therefore$ $y=f(2x+1)$的定义域为[1,3].

剖析: 错解在于没有理解定义域的概念, 复合函数的定义域从两方面考虑. ① 求任何一个函数的定义域就是求自变量x的范围(而非整体变量的范围); ② $y=f[g(x)]$由$y=f(u)$, $u=g(x)$复合而成.

外层函数$f(u)$的定义域制约着内层函数$g(x)$的值域, 从而限制着x的范围.

对于(1), $y=f(2x+1)$是由$y=f(u)$, $u=2x+1$复合而成.

$\because$ $y=f(x)$的定义域为[0,1], 即$f(u)$的定义域为[0,1],

$\therefore$ $0\leqslant u\leqslant 1$,

即$0\leqslant 2x+1\leqslant 1$,

$\therefore$ $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0$,

$\therefore$ $y=f(2x+1)$的定义域为$\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$.

对于(2), 复合函数的定义域为[0,1], 即$0\leqslant x\leqslant 1$,

$\therefore$ 内层函数$u=2x+1$的值域为[1,3],

$\therefore$ 外层函数$y=f(x)$的定义域为[1,3].

应用: 若函数$y=f(2^x)$的定义域是[−1, 1], 则函数$y=f(\log_2 x)$的定义域是$\underline{[\sqrt{2},4]}$.

分析: $\because$ $y=f(2^x)$的定义域是$[-1,1]$,

$\therefore$ 内层函数$u=2^x$的值域为$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$,

即函数$y=f(\log_2 x)$的内层函数$t=\log_2 x$的值域为$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$,

$\therefore$ $\dfrac{1}{2}\leqslant \log_2 x\leqslant 2$.

$\therefore$ $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4$.

三、反函数问题

例3 (1) 若函数$y=f(x)$的图象经过$(0,-1)$, 则函数$f(x+4)$的反函数图象经过点________.

(2) 若函数$y=f(x)$的图象经过$(0,-1)$, 则函数$f^{-1}(x+4)$的图象经过点________.

剖析: 学生在做题时, 误认为$f^{-1}(x+4)$就是$f(x+4)$的反函数. 两道题答案都是(−1, −4), 原因在于对“f^{-1}”的理解错误, 事实上, “f^{-1}”也是一种对应法则, $f^{-1}(x+4)$是“f^{-1}”对整体变量$(x+4)$的作用, 而求一个函数的反函数是指原函数为y关于x的函数, 不是关于$(x+4)$函数. 原函数与反函数的关系是x、y互换.

对于(1), 见下表.

$y=f(x)$的图象	$\xrightarrow{\text{向左平移 4 个单位}}$	$y=f(x+4)=g(x)$的图象	$\xrightarrow{\text{求反函数}}$	$y=g^{-1}(x)$即$y=f(x+4)$的反函数的图象
↓		↓		↓
过$(0,-1)$		过$(-4,-1)$		过$(-1,-4)$

对于(2), 设对应法则$f^{-1}=g$, 要求$y=f^{-1}(x+4)=g(x+4)$, 则需先求$g(x)=f^{-1}(x)$.

$y=f(x)$的图象	$\xrightarrow{\text{求反函数}}$	$y=f^{-1}(x)=g(x)$的图象	$\xrightarrow{\text{向左平移 4 个单位}}$	$y=g(x+4)=f^{-1}(x+4)$的图象
↓		↓		↓
过$(0,-1)$		过$(-1,0)$		过$(-5,0)$

因此(1)过点$(-1,-4)$, (2)过点$(-5,0)$.

应用: 设函数$f(x)=\dfrac{1-2x}{1+x}$, 若函数$g(x)$的图象与$y=f^{-1}(x+1)$的图象关于直线$y=x$对称, 则$g(2)$等于$\underline{-2}$.

分析: $g(x)$与$f^{-1}(x+1)$互为反函数, 求$f^{-1}(x+1)$的反函数.

$\because$ $y=f^{-1}(x+1)$,

$\therefore$ $f(y)=x+1$,

$\therefore$ $x=f(y)-1$,

$\therefore$ $f^{-1}(x+1)$的反函数为$y=f(x)-1$, 即$g(x)=f(x)-1$,

$\therefore$ $g(2)=f(2)-1=-2$.

四、对称问题

(1) 设函数$y=f(x)$的定义域是$\mathbf{R}$, 且$f(x-1)=f(1-x)$, 那么$f(x)$的图象关于____________对称.

把平面轨迹向空间推广

318000　浙江省台州市椒江一中　刘立停

众所周知, 在处理空间问题时, 为了方便研究和简化讨论, 总是把它转化为平面问题. 在教学中, 为了培养学生的空间想象力和逻辑思维能力, 通常把平面上一些问题进行演变和推广, 在空间深入研究, 从中探索和发现平面、空间问题的内在联系. 如平面上到定点的距离为定长的轨迹是圆, 而在空间则是一个球面; 在平面上到定直线距离相等的点的轨迹是两条平行线, 而在空间则是一个圆柱面等等, 这样的例子不胜枚举, 但有的问题并非如此简单, 笔者在此特举几例, 意在抛砖引玉.

一、轨迹由点到线

在平面上, 如图1, 点P在正方形$ABCD$的边BC上移动且满足$AP\perp BC$, 求P的轨迹.

分析: 满足$AP\perp BC$的只能是P与B重合的情况, 即P的轨迹只是一个点B.

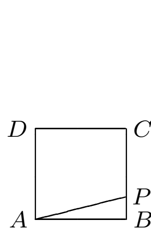


图 1

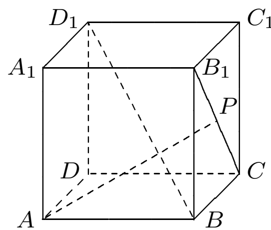


图 2

推广: 在空间中, 如图2, 点P在立方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的侧面BCC_1B_1及其边界上移动, 且满足$AP\perp BD_1$, 求P的轨迹.

~~~~~~

(A) $x=0$;　　(B) $x=1$;

(C) $y=0$;　　(D) $y=1$.

(2) 设$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$, 则函数$y=f(x-1)$与$y=(1-x)$的图象关于______对称.

(A) $x=0$;　　(B) $x=1$;

(C) $y=1$;　　(D) $y=0$.

剖析: (2) 易错选(A). 图象的对称分为图象本身的对称和两个不同图象之间的对称. (1) 中的图象是轴对称图形(本身对称), (2) 中$f(x-1)$与$f(1-x)$是两个不同函数图象的对称.

对于(1), $\because f(x-1)=f(1-x)$,

$\therefore f[(x+1)-1]=f[1-(x+1)]$,

即$f(x)=f(-x)$.

$\therefore y=f(x)$关于y轴$(x=0)$对称, 选(A).

对于(2), $y=f(x)\xrightarrow{\text{向右移1个单位}}y=f(x-1)$,

$y=f(-x)\xrightarrow{\text{向右移1个单位}}y=f(-x+1)$,

而$y=f(x)$与$y=f(-x)$关于$x=0$对称,

$\therefore$ 平移后得出$y=f(x-1)$与$y=f(1-x)$关于$x=1$对称, 选(B).

推广: 设函数$y=f(x)$的定义域是$\mathbf{R}$.

1. 若$f(x+a)=f(-x+b)$, 则$y=f(x)$关于直线$x=\dfrac{a+b}{2}$对称(证略).

2. 函数$y=f(x+a)$与$y=f(b-x)$关于直线$x=\dfrac{b-a}{2}$对称(证略).

应用: 由函数$y=f(2x+1)$是偶函数, 能否判断函数$y=f(x)$图象的对称轴呢?

分析: $\because y=f(2x+1)$是偶函数,

$\therefore f(2x+1)=f(-2x+1)$,

令$t=2x+1$, 则$f(t)=f(2-t)$,

即$f(x)=f(2-x)$,

$\therefore y=f(x)$关于直线$x=1$对称.
~~~~~~

分析: 当$P\to B_1$时, 由三垂线定理知$AB_1\perp BD_1$, 显然有$AP\perp BD_1$;

当$P\to C$时, 同理$AC\perp BD_1$, 显然有$AP\perp BD_1$.

又AB_1、AC确定平面AB_1C, ∴ $BD_1\perp$面AB_1C,

∴ $BD_1\perp$面AB_1C内任一条直线AP,

∴ $P\in$面$AB_1C\cap$面BCC_1B_1.

又面$AB_1C\cap$面$BCC_1B_1=B_1C$,

∴ P轨迹为线段B_1C.

二、轨迹由线段到线段

在平面上, 如图3, 设P、Q分别为正方形$ABCD$边AB和BC上两动点, 且满足$AP=BQ$, 求PQ中点N的轨迹.

分析: 由已知条件可得轨迹为线段MR, 即正方形$ABCD$边AB和BC中点的连线.

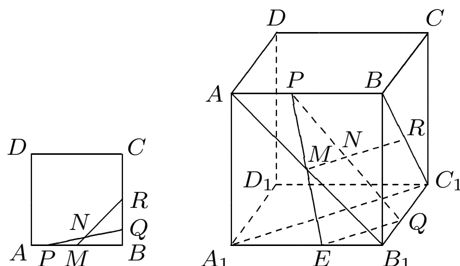


图 3　　图 4

推广: 如果把正方形$ABCD$作为一面在空间向下延伸为立方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$(如图4), P、Q分别为棱AB、B_1C_1上动点, 且$AP=B_1Q$, N为PQ中点, 求N的轨迹.

分析: 找特殊点. 当点P与点A重合时, 点Q与点B_1重合, 此时N为AB_1中点M; 当点P与点B重合时, 点Q与点C_1重合, 此时N为BC_1中点R.

连PM, 延长交A_1B_1于E, 则$AP=EB_1$,

∴ $EB_1=QB_1$, ∴ $EQ/\!/A_1C_1$.

又$MN/\!/EQ$(三角形中位线定理),

∴ $MN/\!/A_1C_1$.

同理$MR/\!/A_1C_1$.

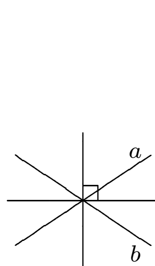
∴ M、N、R共线, ∴ N轨迹为线段MR.

三、轨迹由直线到直线

在平面上, 如图5, 求到两条相交直线a、b等距离的点的轨迹.

分析: 由平面几何知识易得轨迹是两条互相垂直的角平分线.

推广: 在空间中, 如图6, 求到两条异面直线a、b等距离的点的轨迹.



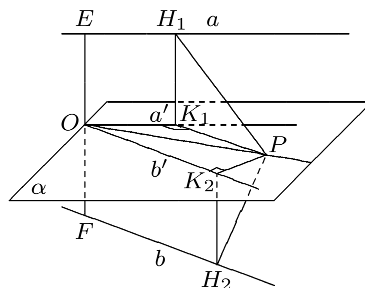


图 5　　图 6

分析: 取a、b公垂线段EF的中点O, 过O作$a'/\!/a$, $b'/\!/b$, 则a'、b'确定平面α, 且α上由两相交直线a'、b'所成的两条角平分线即为所求.

在该角的内外两条角平分线的任一角平分线上任取一点P, 作$PK_1\perp a'$于K_1, 过K_1作$K_1H_1/\!/EF$交a于H_1, 连PH_1, 则$a'\perp$面PK_1H_1, 又$a'/\!/a$,

∴ $a\perp$面PK_1H_1, ∴ $a\perp PH_1$,

∴ PH_1即为P到直线a的距离.

在Rt$\triangle PK_1H_1$中,

$|PH_1|^2=|K_1H_1|^2+|PK_1|^2$.

同理, 作$PK_2\perp b'$于K_2,

过K_2作$K_2H_2/\!/EF$交b于H_2, 连PH_2, 则PH_2即为P到直线b的距离.

在Rt$\triangle PK_2H_2$中,

$|PH_2|^2=|K_2H_2|^2+|PK_2|^2$,

又$|K_1H_1|=|K_2H_2|=\dfrac{|EF|}{2}$, $|PK_1|=|PK_2|$, 故$|PH_1|=|PH_2|$.

四、轨迹由曲线到曲线

在平面上, 如图7, 直线a、b夹角$60°$, C、D分别在a、b上移动且$|CD|=4$, 求CD中点P的轨迹方程.

分析: 设a、b相交于O, $\angle COD=60°$, 以O为原点, 分别以$\angle COD$的内外平分线为轴建立直角坐标系, 如图7. 设$OC=t_1$, $OD=t_2$,

则$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t_1,\frac{1}{2}t_1\right)$、$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t_2,-\frac{1}{2}t_2\right)$,

$\therefore$ $P(x,y)$满足$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{4}(t_1+t_2),\\ y=\frac{1}{4}(t_1-t_2).\end{cases}$

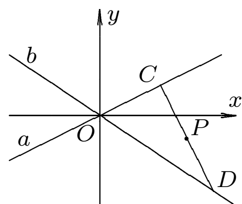


图 7

由$|CD|=4\Longrightarrow\frac{x^2}{12}+\frac{3y^2}{4}=1$. 其轨迹是一个椭圆.

推广: 在空间中, 如图8, 设两条异面直线a、b所成的夹角为60°,

公垂线段$EF=2$, 长为4的线段AB的端点分别在a、b上滑动,

(1) 指出AB中点P轨迹所在的位置;

(2) 求AB中点P的轨迹方程.

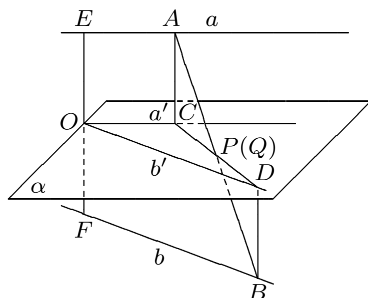


图 8

分析: (1) 取a、b公垂线段EF的中点O, 过O作$a'/\!/a$, $b'/\!/b$, 则a'、b'确定的平面α, 该平面α为EF的中垂面.

设$A\in a$, $B\in b$, $AB=4$, 过A作$AC\perp\alpha$于C, 过B作$BD\perp\alpha$于D,

$\because$ $AC/\!/BD$, $\therefore$ AC、BD确定平面β, 且AB、$CD\subset\beta$.

设AB、CD交于Q, 由$AC=BD=1$,

$\therefore$ $\text{Rt}\triangle AQC\cong\text{Rt}\triangle BQD$,

$\therefore$ $AQ=BQ$, $\therefore$ Q与P重合,

所以P在EF中垂面α上.

(2) $\because$ $AP=BP=2$, $AC=BD=1$,

$\therefore$ $CD=2\sqrt{3}$.

又$OF\underline{/\!/}BD$, $\therefore$ 四边形$ODBF$为平行四边形, $\therefore$ $OD/\!/FB$, $\therefore$ $D\in b'$, $\angle COD=60^\circ$, 且P为CD中点.

至此把空间问题转化为平面问题.

建立如图7所示的直角坐标系,

设$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t_1,\frac{1}{2}t_1\right)$, $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t_2,-\frac{1}{2}t_2\right)$,

则$P(x,y)$满足$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{4}(t_1+t_2),\\ y=\frac{1}{4}(t_1-t_2).\end{cases}$

由$|CD|=2\sqrt{3}\Longrightarrow\frac{x^2}{9}+y^2=1$. 其轨迹是一个椭圆.

如上所述, 我们在处理任何问题时, 要尽量多一点想象和思考, 尽量把条件转化得少一点, 把结论转变得多一点, 把问题和结论再进一步演变和推广. 这样, 在数学世界里, 我们必会感到奥妙无比、乐趣无穷.

(上接第4–2页)

是消极心理在作祟, 以前某个时候的提问, 被忽视或讥笑而产生心理障碍, 当然, 也可能与青春期产生的一些心理变化的消极因素有关. “盲问”的学生表现欲是积极的, 应该及时给予保护,否则会转化为“问盲”, 教师关键在于教会他们掌握如何提问的方法. “圈问”由于在指定提问对象方面具有灵活性, 学生有一个心理适应的缓冲期, 再加上“圈问”的内容具有“旁敲侧击的暗示性”, 容易激发学生的问欲和提出“有效的问题”, 从而有效地克服“问盲”与“盲问”现象.

“海问”、“圈问”、“点问”是提问的一种策略和手段, 三者往往互相结合与补充, 教师应该合理、灵活地运用. 要把握让学生“跳一跳, 够得着”的原则, 灵活设问, 以问引问, 培养学生的问欲, 为培养敢于质疑, 勤学好问的人才尽责.

“5 + 5”规则划拳的概率讨论

514015 广东省梅州嘉应学院 蔺 云

划拳问题虽说是一种游戏, 但它的来源及应用却在商业对策、体育比赛、军事竞赛等领域. 本文对生活中常见的一类划拳问题用概率方法展开讨论, 从中可以学习掌握一些对策知识和技能.

设划拳对策局中人为甲、乙, 规定双方同时出拳, 即每个局中人在喊叫数字j的同时展出i个指头($i=0$、1、2、3、4、5; $j=0$、1、2、$\cdots$、10). 假设甲方喊数a', 展指数为a, 乙方喊数为b', 展指数为b, 则当甲方喊数恰好等于甲、乙双方展指数之和(即$a'=a+b$)时, 甲获胜, 当乙方喊数恰好等于甲、乙双方展指数之和(即$b'=a+b$)时, 乙获胜. 此外还约定“平局”不算, 不能“失拳”, 即$a'\neq b'$, $a\leqslant a'\leqslant a+5$, $b\leqslant b'\leqslant b+5$. 我们把这种规则的划拳问题叫做“5 + 5”规则划拳. 现提出以下几个问题进行讨论.

1. “5 + 5”规则是否公平?

2. “5 + 5”规则的划拳中, 裁决出胜负所需要进行划拳的平均次数是多少?

3. 每一方获胜所需平均划拳次数是多少?

4. 当甲一直展3个指头时, 甲胜的概率会比乙大吗?

5. 当甲一直叫6时, 甲胜的机会能比乙多吗?

6. 当甲展4个指头叫8时, 甲会比乙胜的可能性大吗?

下面分别讨论之:

1. 我们说“5 + 5”规则对甲、乙双方是公平的.

1° 甲、乙双方进行一次划拳可看作一次随机试验, 试验样本空间为

$\Omega=\{[(a,a')(b,b')]|a$、$b=0$、1、$\cdots$、5; a'、$b'=0$、1、$\cdots$、10, $a'\neq b'$, $a\leqslant a'\leqslant a+5$, $b\leqslant b'\leqslant b+5\}$. 由“5 + 5”规则知道, 当甲方喊数$a'$分别取值为0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10时, 甲方对应于喊数a'的展指数a取值的可能方法数分别为1、2、3、4、5、6、5、4、3、2、1. 所以(a,a')所有可能情形为 $1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=36$种; 同理, (b,b')所有可能情形也是36种; $a'=b'=0$、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10时, 对应的$[(a,a')(b,b')]$的所有可能情形分别为1、2、3、4、5、6、5、4、3、2、1共36种, (比如$a'=b'=2$, 就有$[(0,2)(2,2)]$、$[(1,2)(1,2)]$、$[(2,2)(0,2)]$ 3种; $a'=b'=9$, 有$[(4,9)(5,9)]$、$[(5,9)(4,9)]$ 2种), 由于甲、乙双方展几叫几互不影响, 于是甲、乙方出拳是独立的, 根据乘法原理并考虑除去平局, 得样本空间所含基本事件数为$36\times36-36=1260$, 所以Ω是有限的.

2° 假设每个基本事件$[(a,a')(b,b')]$出现概率都相等, 则其发生的概率都等于$\dfrac{1}{1260}$, 故“5 + 5”规则的划拳是一个古典概型. 若记$A=$“甲胜”, $B=$“乙胜”, 则A发生$\Longleftrightarrow a'=a+b$. 由前面讨论知$(a,a')$的所有可能情形为36种, 在$a'=a+b$的条件下$b$随之而确定. 但对应于每个$b$、$b'$取值可能情形有5种, (例如, 当$(a,a')=(4,6)$时, $b=2$, b'可以取2、3、4、5、7共5种可能; 当$(a,a')=(2,7)$时, $b=5$, b'可以取5、6、8、9、10共5种可能), 由乘法原理, 事件A所含基本事件个数为$36\times5=180$, 由古典概率公式得

$$P(A)=\frac{A\text{所含基本事件数}}{\Omega\text{所含基本事件数}}=\frac{180}{1260}=\frac{1}{7}.$$

同理可得$P(B)=\dfrac{1}{7}$, 所以甲、乙双方获胜机会相等, 此规则是公平的.

2. 由于上次划拳对下次划拳不产生影响, 所以连续划拳构成一独立试验序列, 设ξ = "裁决出胜负所需划拳次数", ξ取值为一切自然数, 若记A_i、B_i分别为甲、乙分别在第i次划拳中取胜的事件, 那么, 由于A_i与B_i独立, 则有:

$P(\xi=1) = P(A_1 \cup B_1) = P(A_1)+P(B_1) -P(A_1)P(B_1)=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{13}{49}$;

$P(\xi = 2) = P[\overline{A_1 \cup B_1} \cap (A_2 \cup B_2)] = \frac{36}{49} \cdot \frac{13}{49}$;

$\cdots$

于是ξ的概率分布为几何分布.

$P(\xi = k) = \left(\frac{36}{49}\right)^{k-1} \frac{13}{49}$. $k = 1, 2, \cdots$,

ξ的数学期望值为

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{36}{49}\right)^{k-1} \frac{13}{49} = \frac{13}{49} \sum_{k=0}^{\infty}(k + 1) \left(\frac{36}{49}\right)^{k} = \frac{13}{49}\frac{1}{\left(1-\frac{36}{49}\right)^2} = \frac{49}{13}.$$

即$3 < E\xi < 4$. 这表明裁决胜负所需要的平均次数大于3小于4.

3. 设甲取胜所需划拳次数为η, 则η是一离散型随机变量, 与2同理, 可得η的概率分布为 $P(\eta = k) = \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1} \frac{1}{7}$, $k = 1, 2, \cdots$,

$$E\eta = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{7} \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1} = 7.$$

∴ 甲获胜所需平均划拳次数为7次.

同理乙获胜所需平均划拳次数也是7次.

4. 设C_3 = "展3个指头"的事件, 即当$a = 3$时, a'的可能取值为3、4、5、6、7、8共6种, 对应于每个a', 且$a' \neq b'$, (b, b')的可能情形有30种, 所以C_3所含基本事件数为6×180,

∴ $P(C_3) = \frac{180}{1260} = \frac{1}{7}$.

AC_3 = "甲展3个指头能取胜"事件, 此时$a' = 3 + b$, a'有3、4、5、6、7、8共6种可能取值, b随a'而确定. 对应于每个确定的b, b'又有5种可能取值(比如当$a' = 5$时, $b = 2$, b'可以是2、3、4、6、7共5种). 于是AC_3所含基本事件数为$6 \times 5 = 30$. 从而 $P(AC_3) = \frac{30}{1260} = \frac{1}{42}$. 故在甲一直展出3个指头时, 甲取胜的概率为$P(A|C_3)$, 由条件概率公式, 有

$$P(A|C_3) = \frac{P(AC_3)}{P(C_3)} = \frac{\frac{1}{42}}{\frac{1}{7}} = \frac{1}{6}.$$

同理可得$P(B|C_3) = \frac{1}{6}$, 即$P(A|C_3) = P(B|C_3)$ (因为BC_3所含基本事件$[(3, a')(b, 3 + b)]$的总数与AC_3相同, 都等于30), 说明在甲一直展3个指头时甲胜的机会不比乙多.

5. 设D_6 = "甲喊叫6"事件, 当$a' = 6$, a的可能取值为1、2、3、4、5共5种, 对应于每个取定的a且$a' \neq b'$. (b, b')取值的可能情形有30种, 因此, D_6所含基本事件数为$5 \times 30 = 150$, $P(D_6) = \frac{150}{1260} = \frac{5}{42}$. AD_6 = "甲喊6能取胜", 此时, $a' = 6$, a有5种可能取值, 由于$6 = a + b$, b随a而定, 相对每个确定的b, $b'(\neq a')$又有5种可能取值, 因此, AD_6所含基本事件数为 $5 \times 5 = 25$. $P(AD_6) = \frac{25}{1260} = \frac{5}{252}$. 故当甲一直叫6时, 甲胜的概率为

$$P(A|D_6) = \frac{P(AD_6)}{P(D_6)} = \frac{\frac{5}{252}}{\frac{5}{42}} = \frac{1}{6}.$$

同理可得$P(B|D_6) = \frac{1}{6}$, 所以, 在甲一直叫6时, 甲胜的机会与乙相同.

6. C_4D_8 = "展4叫8", 即当$a = 4$, $a' = 8$时, 因$b' \neq a'$, (b, b')取值有30种可能, C_4D_8所含基本事件数为30. $P(C_4D_8) = \frac{30}{1260} = \frac{1}{42}$. AC_4D_8 = "甲展4喊8且能取胜", 即在$8 = 4 + b$条件下, $b = 4$, b'有5种可能取值, AC_4D_8所含基本事件数为5. $P(AC_4D_8) = \frac{5}{1260} = \frac{1}{252}$, 因此, 当甲喊8展4时, 取胜概率为

$$P(A|C_4D_8) = \frac{\frac{1}{252}}{\frac{1}{42}} = \frac{1}{6}.$$

同理得$P(B|C_4D_8) = \frac{1}{6}$. 故在甲喊8展4时, 甲、乙取胜的概率是相同的.

我怎样编奥赛数学题

200433 复旦大学数学系学生 何忆捷

我是一名奥林匹克数学的爱好者、参与者. 中学时各科都喜欢, 至今保持着二胡特长及对音乐、体育爱好的投入, 甚至还学了一点吉他、小提琴和校园歌曲创作.

我觉得学习贵在创造. 因此在参加奥数学习时, 除了听讲座做习题之外, 经常自己编题、命题. 命题研究的过程常常带给我新鲜感. 当假想自己正为某奥赛编拟试题时, 便会对题型的选择、构思的出新、论证的严密、文字的简洁提出更高要求, 进一步促进创造性的数学思维. 进入复旦之后, 我还经常编题.

奥赛数学与高等数学是相辅相成的. 运用高等数学的思想能居高临下解决一批奥数难题. 例如, 我高中创作的一道奥数题是: 证明当实数$m>1$时,函数$f(x)=(m^x-m)^{\frac{1}{x}}$在$(1,+\infty)$上单调递增. 当初的解答用了精妙技巧, 但学了"对数求导法"后, 使我轻易给出了另一种证明. 由此, 也激发了我对高等数学的求知欲.

以下是我所编的三道高中奥赛数学题:

例1 函数$y=2003-ax^2(a>0)$的图象和x轴所围成的封闭图形内部和边界共有2003^2个整点, 则a的取值范围是________.

解: $y=2003-ax^2(a>0)$开口向下, 封闭图形对称轴为y轴, 图形内部和边界所有整点中, 在对称轴上的共有$(0,0),(0,1),\cdots,(0,2003)$这2004个, 而对称轴两侧整点成对出现, 故无论a取值如何, 图形必包含偶数整点, 不为2003^2个, 所以a的取值范围是$\varnothing$.

注: 将$y=2003-ax^2$及2003^2中出现的$2003,2003^2$改成任意2个满足题目前提条件的, 并且奇偶性相同的数, 亦可用同样方法推得a的取值范围是$\varnothing$.

说明 2001年7月28日, 我去沈阳东北育才学校参加了第一届CMO夏令营, 期间做的训练题中, 有下述存在打印错误的题目:

函数$y=4-ax^2$的图象和x轴所围成的封闭图形内部和边界共有12个整点(整点是指横坐标与纵坐标都是整数的点), 则a的取值范围是________.

该"题"的正确答案应为$\varnothing$, 而不是某个具有长度的区间. 在此"题"的基础上, 我将它改成例1, 并且至今仍然认为这是一个不错的习题.

我曾将此题给几位同学做, 实验结果是: 他们的思想都局限在"连续性"上——何时才能将抛物线开口大小调整到适当值, 使封闭图形恰好含有规定数目的整点, 而没有去考虑"离散性"——整点在抛物线开口大小的调整过程中是成对出没的. 事实上, 真正的结论就是那么简单的一个"$\varnothing$", 运用的手段就是对称与奇偶分析.

例2 若边长为自然数, 且面积为2^k-1 $(k\in\mathbf{N}^*)$的矩形桌面M被满足以下条件的k块矩形纸片完全覆盖: ① 纸片的边平行于桌沿, ② 边长为自然数, ③ 面积分别为$1,2,4,\cdots,2^{k-1}$, 则称M是"可覆盖的". 如果在任取$n\in\mathbf{N}^*,n\leqslant k$的情况下, 任何一种满足题目条件的桌面都是"可覆盖的", 求k的最大值.

解: 由条件③, 所有矩形纸片面积和$1+2+4+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$等于桌面面积, 为完全覆盖桌面$M$, 所有纸片必不重叠.

(1) 以下就$n=1,2,\cdots,9$对桌面进行分划, 事实上, 恰好都能利用平面内的直线所确定的网格来分划, 以下仅写出直线方程.

当$n=1$时,

1×1: $x=0, x=1, y=0, y=1$.

当$n=2$时,

3×1: $x=0, x=1, x=3, y=0, y=1$.

当$n=3$时,

7×1: $x=0, x=1, x=3, x=7, y=0, y=1$.

当$n=4$时,

15×1: $x=0, x=1, x=3, x=7, x=15, y=0, y=1$.

5×3: $x=0, x=1, x=5, y=0, y=1, y=3$.

当$n=5$时,

31×1: $x=0, x=1, x=3, x=7, x=15, x=31, y=0, y=1$.

当$n=6$时,

63×1: $x=2^j-1 (j=0,1,2,\cdots,6), y=0, y=1$.

21×3: $x=0, x=1, x=5, x=21, y=0, y=1, y=3$.

9×7: $x=0, x=1, x=9, y=0, y=1, y=3, y=7$.

当$n=7$时,

127×1: $x=2^j-1 (j=0,1,2,\cdots,7), y=0, y=1$.

当$n=8$时,

255×1: $x=2^j-1 (j=0,1,2,\cdots,8), y=0, y=1$.

85×3: $x=0, x=1, x=5, x=21, x=85, y=0, y=1, y=3$.

51×5: $x=0, x=1, x=3, x=19, x=51, y=0, y=1, y=5$.

17×15: $x=0, x=1, x=17, y=2^j-1 (j=0,1,2,\cdots,4)$.

当$n=9$时,

511×1: $x=2^j-1 (j=0,1,2,\cdots,9), y=0, y=1$.

73×7: $x=0, x=1, x=9, x=73, y=0, y=1, y=3, y=7$.

所以$n=1,2,\cdots,9$所有可能桌面都是"可覆盖的".

(2) 当$n=10$时, 对于$2^{10}-1=11\times93$的桌面M, 证明它不是"可覆盖的". 假设M是可覆盖的, 于是, 由$93=2^6+2^4+2^3+2^2+2^0$; $11=2^3+2^1+2^0$这两个二进制表示知: 93至少写成5个2的自然数幂的和. 11至少写成3个2的自然数幂的和(自然数包括0).

考虑与桌面以AB为公共边的矩形. 因为他们的面积值为2的自然数幂, 且边长为自然数, 所以它的长和宽均为2的自然数幂, 故与桌面以AB为公共边的矩形至少5个.

同理, 与桌面以CD为公共边的矩形也至少5个, 与桌面以AD为公共边的矩形至少3个.

若存在与桌面同时以AB、CD为公共边的矩形纸片, 则它的长或宽中必有一个数值为桌面的宽11, 不是2的自然数幂, 矛盾, 所以这10个矩形不会重复计算, 所以就是这10个矩形覆盖了$ABCD$, 故与AD有公共边的矩形仅有两个, 但这与至少3个矛盾, 假设不成立.

以上说明$n=10$时有反例!

综合(1)、(2), 得$k_{\max}=9$.

注: (1) $n=10$时, 11×93的桌面"不可覆盖"的另证:

假设可覆盖, 则所有纸片不重叠、不遗漏、不多余, 恰好盖住M. 考虑面积为2^9的纸片S_1. 由已知条件①、②, 其长、宽必为2的幂, 设其规格为$2^{k_1}\times2^{k_2}$, $k_1+k_2=9$(其中, 长为2^{k_1}的边与长为93的桌沿平行). ①

$\because 2^7>93$, $\therefore k_1\leqslant6$, ②

$\because 2^4>11$, $\therefore k_2\leqslant3$. ③

故由①、②、③, 只有$k_1=6, k_2=3$, 所以S_1的长为64, 宽为8.

再考虑面积值为2^8的矩形纸片S_2, 设其规格为$2^{k_3}\times2^{k_4}$, $k_3+k_4=8$, 此时不妨设$k_3\geqslant k_4$, 即有$k_3\geqslant4$.

① 若$k_4\geqslant4$, 则纸片S_2的规格16×16, 不可能放在宽为11的桌面M内.

② 若$k_3\geqslant7$, 则S_2的长$\geqslant2^7>93$, 不可能放在长为93, 宽更小的M内.

③ 若$k_3=5$或$k_3=6$, 则S_2的规格为

32×8或64×4, 而且只能是边长为32或64的边与长93的桌沿平行. 由于$2^{k_1}+2^{k_3}\geqslant 2^6+2^5>93$, 而$2^{k_2}+2^{k_4}\geqslant 2^3+2^2>11$, 所以$S_1$与$S_2$在$M$相邻两桌沿的投影均重叠, 显然$S_1$、$S_2$有公共部分, 矛盾.

于是11×93的桌面不是"可覆盖的", 即$n=10$有反例!

(2) 本题也是首届CMO夏令营期间所创作. 听说当时举办夏令营的沈阳东北育才学校规划面积为255亩. 一日晚上睡在国际部宿舍中, 我们延安中学四名营员对之作了讨论. 讨论源于$255=2^8-1$(是一个比较特殊的数字), 我们就想, 假定整个学校的占地是一个矩形, 长、宽都是255的约数, 相乘为255(单位略), 那么能否将此学校的占地划分成平行于学校边界的, 面积分别为$1,2,4,\cdots,128$的8块矩形地? 为简化问题, 我们又设矩形地的长、宽也为自然数, 后者发现, 这是一个"过于简单"的问题(相当于本题中$n=8$的情形). 我们各自躺在床上, 对n较大小的情形都作了构造, 作出了第一个猜想: 对任何$k\in\mathbf{N}^*$, 面积为2^k-1的满足条件的M都是"可覆盖的". 第二天的自习课上, 我用上述的"另证"推翻了这个猜想. 于是第二天晚上, 我们作出了第二个猜想: 对任何正整数k, 面积为$2^{2^k}-1$的满足条件的M都是"可覆盖的". 第三天的自习课上, 我发现, 面积为$2^{2^6}-1$的矩形桌面M中有一个长为$6700417\times(2^{32}-1)$, 宽为641的是不可覆盖的. 证明方法类似, 原因是$2^{2^5}+1$不是素数, 而是641×6700417, 如此便为推翻结论提供了条件. "猜想二"是"费马数$2^{2^n}+1$都是素数"这个"错误猜想"的"推论", 这点很"巧".

(3) 本题解答的第(2)部分摘录的是我的同班同学, 2002年中国数学奥林匹克银牌得主张思汇的解法. 据他的感觉, 其运用之手法与2001年全国高中数学联赛加试第三题略有相似, 不过本题或许只能作为一个问题而存在, 因为前半部分的构造过程太长而又索然无味.

例3 设定义域$(0,+\infty)$的单调递增函数$f(x)$, 满足对任何$x\in(0,+\infty)$, 都有$f(x)>-\dfrac{1}{x}$, $f\left[f(x)+\dfrac{1}{x}\right]=1$, 则$f(2)=$________.

解: 设$f(x)+\dfrac{1}{x}=a>0$, 则$f(a)=1$.

因为$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增, 所以a为一个确定的值, 令$x=a$, 则

$$f(a)+\frac{1}{a}=a\Longrightarrow f(a)=a-\frac{1}{a}.$$

又$a>0$, $\therefore\ a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,

$$\therefore\ f(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{1}{x}.$$

经检验, 此函数满足一切所给条件, 故

$$f(2)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

说明 本题的原形为:

设函数$f(x)$对一切$x>0$有意义, 且满足下列条件:

(1) $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

(2) 对一切$x>0$, 有$f(x)>-\dfrac{1}{x}$;

(3) 对$x>0$, 有$f(x)f\left[f(x)+\dfrac{1}{x}\right]=1$;

求$f(1)$的值.

例3与它的区别仅仅在于条件(3)的一个细节. 读者是否可以想象到, 老师在黑板上抄题时漏写了一个"$f(x)$", 就让我"编"出一道题, 待自己意识到这点时, 答卷上却已出现了"×".

(上接第4–22页)

猜想8: 如图5, AB为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$中过点$M(0,m)$ $(m\neq\pm b, m\neq 0)$的一条弦,直线l: $y=\dfrac{b^2}{m}$与y轴相交于点N, BC平行于y轴并交直线l于点C, D为线段MN的中点, 那么A、D、C三点共线吗? (也可仿照猜想4证明.)

11. 课后思考

1. 猜想7、8的逆命题成立吗?

2. 猜想7、8可以推广到双曲线中吗? 其逆命题成立吗?

参考文献

1.姜坤崇. 圆锥曲线两个性质的推广. 数学通报. 2003. 7.

一道高中竞赛题的探讨与推广

550003 贵州教育学院 李 晟

1. 一道竞赛题

题目 (2004年全国高中数学联赛题) 如图1, 设O点在$\triangle ABC$内部, 且有$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 则$\triangle ABC$的面积与$\triangle AOC$的面积的比为 ……………………………… ( )

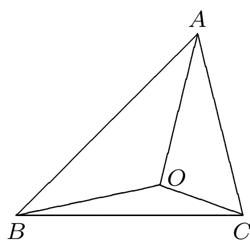


图 1

(A) 2; (B) $\dfrac{3}{2}$; (C) 3; (D) $\dfrac{5}{3}$.

在本题中, 已知条件$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$是决定所求面积比的重要条件, 但未说由此条件确定的O点有何特性, 就连这样的点该怎样画出? 都难以捉摸, 何谈推演?

2. 难点的克服——转化

条件$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$之所以不好利用, 难在式中的$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$有两个不为1的系数, 如果能消去这两个系数, 难关就会迎刃而解.

为此, 延长OB至B', 使$\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$, 延长$OC$至$C'$, 使$\overrightarrow{OC'}=3\overrightarrow{OC}$, 如图2,

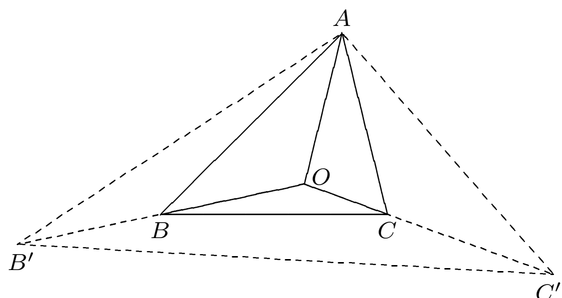


图 2

则在$\triangle AB'C'$中, O点便是合乎条件$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{0}$之点.

3. 原题之解

重心的一个特性是它与三顶点的连线将原三角形的面积三等分. 利用这一特性, 再回到图2, 便易求得:

$$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{3}S_{\triangle AOC'}=\frac{1}{9}S_{\triangle AB'C'},$$
$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOB'}=\frac{1}{6}S_{\triangle AB'C'},$$
$$S_{\triangle BOC}=\frac{1}{6}S_{\triangle B'OC'}=\frac{1}{18}S_{\triangle AB'C'},$$

三式两端相加, 即得

$$S_{\triangle ABC}=\frac{3+2+1}{18}S_{\triangle AB'C'}=\frac{1}{3}S_{\triangle AB'C'},$$

$$\therefore\ S_{\triangle ABC}:S_{\triangle AOC}=\frac{1}{3}:\frac{1}{9}=3.$$

故应选(C).

4. 巧拆第三项($3\overrightarrow{OC}$)

因 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$,

故作出 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$即可看出$O$的位置. 为此, 设$D$、$E$分别为$AC$、$BC$的中点, 如图3, 则有

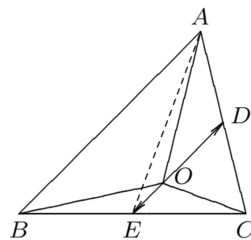


图 3

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}, \quad ①$$
$$2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=4\overrightarrow{OE}, \quad ②$$

由① + ② 得

$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=2(\overrightarrow{OD}+2\overrightarrow{OE})=\overrightarrow{0}$.

由此可知$\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OE}$共线,

且$\left|\overrightarrow{OD}\right|=2\left|\overrightarrow{OE}\right|$,

即O在中位线DE的一个三等分点处.

$\therefore\ \dfrac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle AOC}}=\dfrac{3}{2}$,

$\therefore\ \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}}=\dfrac{2S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle AOC}}=\dfrac{2\times 3}{2}=3$.

故应选(C).

注: 这是命题组为改卷提供的解法, 虽说巧妙, 但不如转化为重心显得思路自然.

5. 快速解法——坐标计算与特殊化

现在要问: 如果一时想不到确定点O的办法, 又该如何?

既然向量可转化为坐标, 何不通过坐标的计算, 间接地达到确定点O的目的!

或许是计算坐标有些繁, 使人放弃了这一有效的途径. 其实, 本题既是选择题, 何不取其特殊情形, 使计算变得极其简便.

为此, 取$\triangle ABC$使$\angle A=\angle 90^\circ$, 并以A为原点, $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$分别为x轴、y轴的指向, 如图4. 在此坐标系中, 设B、C的坐标分别为$(b,0)$、$(0,c)$, 又设(x_0,y_0)为O点的坐标, 则有$\overrightarrow{OA}=(-x_0,-y_0)$, $\overrightarrow{OB}=(b-x_0,-y_0)$, $\overrightarrow{OC}=(-x_0,c-y_0)$.

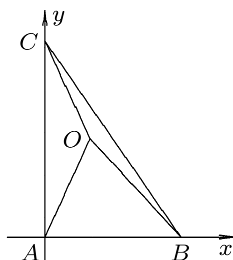


图 4

代入$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$中, 即

$(2b-6x_0,3c-6y_0)=(0,0)$.

$\therefore\ x_0=\dfrac{b}{3}$是$\triangle AOC$中$AC$边上的高.

$\because\ S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}bc$,

$S_{\triangle AOC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot x_0=\dfrac{1}{6}bc$,

$\therefore\ \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}}=3$.

注: 对任意$\triangle ABC$, 取A为原点, $\overrightarrow{AC}$为y轴的正向, 上述计算过程同样有效.

6. 推广——普遍化

最初的解法——把点O化为重心, 还有一个优点, 那就是易于将原题推广.

如图5, 设O是$\triangle ABC$所在平面上的一点, m、n、p是三个实数, 若

$m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$,

试求$S_{\triangle ABC}$被点O所分的三部分面积之比.

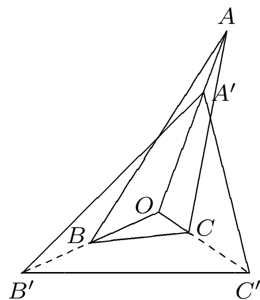


图 5

解: 在OA、OB和OC上或其延长线上分别取A'、B'和C', 使$\overrightarrow{OA'}=m\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}=n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC'}=p\overrightarrow{OC}$, 则有$\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{0}$, 故知$O$是$\triangle A'B'C'$的重心, 且有

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{mn}S_{\triangle A'OB'}=\frac{1}{3mn}S_{\triangle A'B'C'},$$

$$S_{\triangle BOC}=\frac{1}{np}S_{\triangle B'OC'}=\frac{1}{3np}S_{\triangle A'B'C'},$$

$$S_{\triangle COA}=\frac{1}{pm}S_{\triangle C'OA'}=\frac{1}{3pm}S_{\triangle A'B'C'}.$$

$\therefore\ S_{\triangle ABC}=\dfrac{m+n+p}{3mnp}S_{\triangle A'B'C'}$,

$\therefore\ \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOB}}=\dfrac{m+n+p}{p}$.

同理, $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BOC}}=\dfrac{m+n+p}{m}$,

$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle COA}}=\dfrac{m+n+p}{n}$.

探析中考数学研究性试题的背景

317000 浙江省临海市第五中学 李梦虎

近几年来, 各地对研究性试题的探索日渐增多, 一些以研究性学习为背景的问题逐步引入中考数学试卷之中. 这不但为数学教学提出了新的要求, 也为中考复习提出了新的课题, 即如何探析中考数学研究性试题的背景. 本文试想通过一些中考试题背景的剖析, 为在数学教学中如何设计研究性试题提供一些事例, 为学生开展数学研究性学习提供一些线索和资料.

一、以传统知识新定义的模式作为问题背景

对于这一类问题通常是在某个传统知识的背景下, 给出一个新的定义, 要求学生能在新定义下, 联系所学的知识解题. 主要考查学生的阅读理解能力和对知识的应用能力.

例1 (2004年吉林省中考数学试题) 已知抛物线$L: y=ax^2+bx+c$(其中a、b、c都不等于0), 它的顶点P的坐标是$\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$, 与$y$轴的交点是$M(0,c)$. 我们称以$M$为顶点, 对称轴是$y$轴且过点$P$的抛物线为抛物线$L$的伴随抛物线, 直线$PM$为$L$的伴随直线.

(1) 请直接写出抛物线$y=2x^2-4x+1$的伴随抛物线和伴随直线的解析式: 伴随抛物线的解析式__________, 伴随直线的解析式__________;

(2) 若一条抛物线的伴随抛物线和伴随直线分别是$y=-x^2-3$和$y=-x-3$, 则这条抛物线的解析式是__________;

(3) 求抛物线$L: y=ax^2+bx+c$(其中a、b、c都不等于0) 的伴随抛物线和伴随直线的解析式;

(4) 若抛物线L与x轴交于$A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$两点, $x_2>x_1>0$, 它的伴随抛物线与x轴交于C、D两点, 且$AB=CD$. 请求出a、b、c应满足的条件.

本题在二次函数传统知识基础上新定义了"伴随抛物线"和"伴随直线", 使传统的二次函数问题变成极具"研究价值"的研究性试题. 其中(1)、(2)两小题要求学生从正反两方面对特殊情形下"伴随抛物线"和"伴随直线"与原抛物线的关系进行研究, 第(3)小题要求学生对一般情形下"伴随抛物线"和"伴随直线"与原抛物线关系的进行研究, 第(4)小题则要求学生对"伴随抛物线"的一个性质进行研究.

从以上这题可以看出传统知识新定义的模式可以成为数学评价乃至数学教学时创设研究性学习问题的有效途径.

二、以学生较为熟悉的图形作为问题背景

让学生通过对较为熟悉的图形的观察, 找出图形的本质特征, 然后加以归纳、猜想、验证. 它主要考查学生的观察、比较、分析、抽象、概括等思维能力.

例2 (2004年泰州市中考数学试题) 观察图1至图5中小黑点的摆放规律, 并按照这样的规律继续摆放, 记第n个图中小黑点的个数为y.

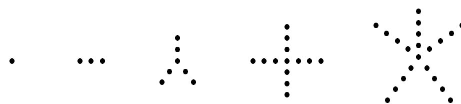


图1 图2 图3 图4 图5

解答下列问题:

(1) 填表:

n	1	2	3	4	5	$\cdots$
y	1	3	7	13		$\cdots$

(2) 当$n=8$时, $y=$__________.

(3) 根据上表中的数据, 把n作为横坐标, 把y作为纵坐标, 在图6的平面直角坐标系中描出相应的各点(n,y), 其中$1\leqslant n\leqslant 5$.

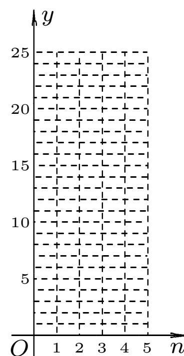


图 6

(4) 请你猜一猜上述各点会在某一函数的图象上吗? 如果在某一函数的图象上, 请写出该函数的解析式.

本题是以小黑点的摆放规律为问题背景创设的研究性试题, 要求学生在观察、归纳、猜想的基础上, 再通过列表、描点、函数拟合的方法探究图形的变化规律.

三、以"实验探究"作为问题背景

在数学学科中开展研究性学习一种常见的形式, 就是在教师的指导下, 学生通过实验、猜想、自主地发现问题, 然后以探究的方式来解决问题.

例3 (2004年大连市中考数学试题) 如图7, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内切于点 P. C 是 $\odot O_1$ 上任一点 (与点 P 不重合).

实验操作: 将直角三角板的直角顶点放在点 C 上, 一条直角边经过点 O_1, 另一直角边所在直线交 $\odot O_2$ 于点 A、B, 直线 PA、PB 分别交 $\odot O_1$ 于点 E、F, 连结 CE (图8是实验操作备用图).

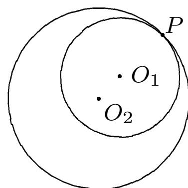


图 7

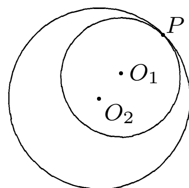


图 8

探究: (1) 你发现弧 CE、弧 CF 有什么关系? 用你学过的知识证明你的发现;

(2) 发现线段 CE、PE、BF 有怎样的比例关系? 证明你的发现.

(3) 如图9, 若将上述问题的 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 由内切改为外切, 其它条件不变, 请你探究线段 CE、PE、BF 有怎样的比例关系, 并说明理由.

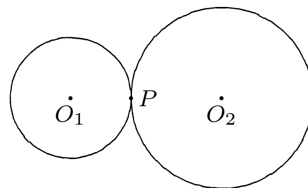


图 9

本题要求学生通过实验、猜想得出弧 CE、弧 CF 关系以及线段 CE、PE、BF 在图7和图9中的比例关系, 再用所学过的知识证明发现的问题, 让学生经历数学家的思维方式, 使探究能力和创新意识都得到了锻炼和发展. 笔者认为在学生的学习过程中, 教师若能经常以"实验探究"作为问题背景创设研究性问题, 让学生经历实验、猜想、证明等数学活动, 既能发展学生初步的演绎推理能力, 也能发展学生的合情推理能力, 并使"知识与技能"、"数学思考"、"解决问题"、"情感与态度"四个目标都能得到较好的落实.

四、以古典数学名题作为问题背景

例4 (2004年资阳市中考数学试题) 如图10, 分别以直角三角形 ABC 三边为直径向外作三个半圆, 其面积分别用 S_1、S_2、S_3 表示, 则不难证明 $S_1 = S_2 + S_3$.

(1) 如图11, 分别以直角三角形 ABC 三边为边向外作三个正方形, 其面积分别用 S_1、S_2、S_3 表示, 那么 S_1、S_2、S_3 之间有什么关系 (不必证明)?

(2) 如图12, 分别以直角三角形 ABC 三边为边向外作三个正三角形, 其面积分别用 S_1、S_2、S_3 表示, 请你确定 S_1、S_2、S_3 之间的关系并加以证明;

(3) 若分别以直角三角形 ABC 三边为边向外作三个一般三角形, 其面积分别用 S_1、S_2、S_3 表示, 为使 S_1、S_2、S_3 之间仍具有与 (2) 相同的关系, 所作三角形应满足什么条件? 证明你的结论;

以"杨辉三角"为背景的试题例析

214431 江苏省江阴第一中学 唐 永

研究性学习是新教材最显著的特点之一，体现了课程改革的新理念，也是高考命题改革的求新点. 研究性学习试题体现的"不是让学生拿着钥匙去开锁，而是要让学生自己创造钥匙去开锁". 新教材研究性课题——"杨辉三角"的内容极为丰富，成为联系众多知识的媒介，在研究其他许多问题时，获得广泛的应用. 下面采撷四道典型例题并预以剖析，旨在探索题型规律，揭示解题方法.

例1 (南通市高考模拟题) 杨辉是中国南宋末年的一位杰出的数学家、数学教育家. 杨辉三角是杨辉的一大重要研究成果，它的许多性质与组合数的性质有关，杨辉三角中蕴涵了许多优美的规律. 古今中外，许多数学家如贾宪、帕斯卡、华罗庚等都曾深入研究过，并将研究结果应用于其他工作. 图1是一个n阶的杨辉三角:

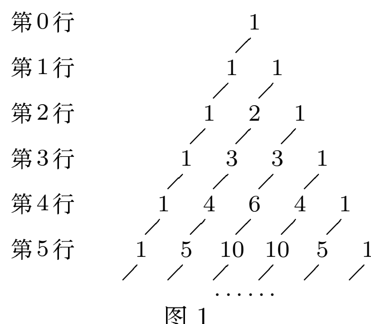


图 1

(4) 类比(1)、(2)、(3)的结论，请你总结出一个更具一般意义的结论.

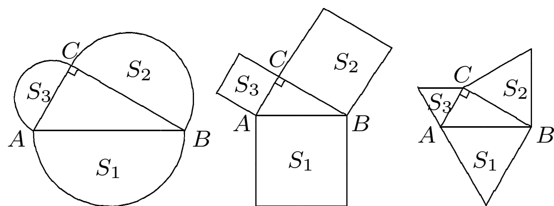


图 10 图 11 图 12

勾股定理是反映自然界基本规律的一条重要结论，勾股定理的发现、验证和应用蕴涵着丰富的文化价值，图11中的面积关系就是勾股定理的一种图形描述. 本题就是以这个图形为问题背景创设的研究性试题，要求学生把这种面积关系进行推广，总结出一个更具一般意义的结论.

五、以初高中知识衔接点作为问题背景

以高中数学和初中数学的衔接点作为问题的背景，主要考察学生对所学知识的运用能力，还可以探测出学生后继学习的潜能.

例5 (2004年淮安市中考数学试题) 已知两个正整数的和与积相等，求这两个正整数.

解: 不妨设这两个正整数为a、b，且$a \leqslant b$.

由题意，得$ab = a + b$ ………………… $(*)$

则$ab = a + b \leqslant b + b = 2b$，所以$a \leqslant 2$.

因为a为正整数，所以$a = 1$或2.

① 当$a = 1$时，代入等式$(*)$，得$1 \cdot b = 1 + b$，b不存在;

② 当$a = 2$时，代入等式$(*)$，得$2 \cdot b = 2 + b$，$b = 2$.

所以这两个正整数为2和2.

仔细阅读以上材料，根据阅读材料的启示，思考是否存在三个正整数，它们的和与积相等? 试说明你的理由.

本题是用高中数学不等式证明的放缩法，解决初中数学中的不定方程的整数解问题，要求学生先通过不等式的放缩法确定出这些整数的范围，然后利用整数的性质及方程的知识求出这三个数. 主要考查学生的阅读理解能力、知识的正迁移能力以及逻辑思维能力.

试回答(其中第(1)～(5)小题只须直接给出最后的结果, 无须求解过程):

(1) 第______行中从左到右第14与第15个数的比为2:3.

(2) 记第i ($i\in\mathbf{N}^*$) 行中从左到右的第j ($j\in\mathbf{N}^*$) 个数为a_{ij}, 则数列$\{a_{ij}\}$的通项公式为______; n阶杨辉三角中共有______个数.

(3) 第k行各数的和是______.

(4) n阶杨辉三角的所有数的和是______.

(5) 第p ($p\in\mathbf{N}^*$, 且$p\geqslant 2$) 行除去两端的数字1以外的所有数都能被p整除, 则整数p一定为_____.

(A) 奇数; (B) 质数;

(C) 非偶数; (D) 合数.

(6) 在第3斜列中, 前5个数依次为1、3、6、10、15; 第4斜列中, 第5个数为35. 显然, $1+3+6+10+15=35$. 事实上, 一般地有这样的结论: 第m斜列(从右上到左下)中前k个数之和, 一定等于第$m+1$斜列中第k个数. 试用含有m、k(m、$k\in\mathbf{N}^*$)的数学公式表述上述结论并证明其正确性.

数学公式为______________________.

证明:______________________.

略解: (1) 34;

(2) $a_{ij}=C_i^{j-1}$; $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$;

(3) 2^k; (4) $2^{n+1}-1$; (5) B;

(6) $C_{m-1}^{m-1}+C_m^{m-1}+\cdots+C_{m+k-2}^{m-1}=C_{m+k-1}^m$. 事实上,

$$\begin{aligned}&C_{m-1}^{m-1}+C_m^{m-1}+\cdots+C_{m+k-2}^{m-1}\\&=(C_m^m+C_m^{m-1})+C_{m+1}^{m-1}+\cdots+C_{m+k-2}^{m-1}\\&=(C_{m+1}^m+C_{m+1}^{m-1})+\cdots+C_{m+k-2}^{m-1}=\cdots\\&=C_{m+k-2}^m+C_{m+k-2}^{m-1}=C_{m+k-1}^m.\end{aligned}$$

评注: 本例第1小题是2004年上海春季高考第12题, 本题综合了组合数性质、数列等多个知识点.

例2 (2003年全国高考卷第22题) 设$\{a_n\}$是集合$\{2^t+2^s|0\leqslant s<t$, 且t, $s\in\mathbf{Z}\}$中所有的数从小到大排列成的数列, 即$a_1=3$, $a_2=5$, $a_3=6$, $a_4=9$, $a_5=10$, $a_6=12$, $\cdots$, 将数列$\{a_n\}$各项按照上小下大, 左小右大的原则写成如图2的三角形数表.

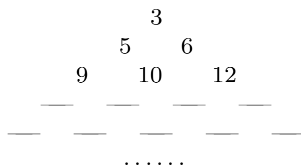


图 2

(1) 写出这个三角形数表的第四、五行各数;

(2) 求a_{100}.

略解: (1) 第四行: 17、18、20、24; 第五行: 33、34、36、40、48.

(2) $a_{100}=16640$.

评注: 本题解题的思想方法来自于新教材研究性课题"杨辉三角"的方法, 即观察、归纳、概括、猜想、发现问题.

例3 (合肥市高考模拟题) 图3数表中每一个数都是一个正整数的倒数, 起始行(第0行)为1, 每一个数都等于脚下两数之和.

(1) 试填写第1行和第2行, 填法是否惟一? 说明理由.

(2) 注意第n行($n=0$, 1, 2, $\cdots$)的第1个数总可为$\dfrac{1}{n+1}$, 猜想此时第n行第r个数(不必证明).

(3) 把数表展开为数列$\{a_n\}$: $\dfrac11$, $\dfrac12$, $\dfrac12$, $\dfrac13$, $\dfrac16$, $\dfrac13$, $\cdots$, 求a_{100}及$\sum\limits_{i=1}^{100}\dfrac{1}{a_i}$.

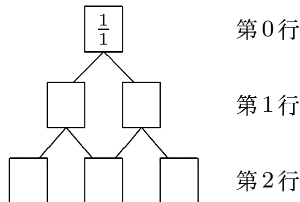


图 3

略解: (1) $\dfrac1m+\dfrac1n=1$ (m、$n\in\mathbf{N}^*$). 则有$\dfrac1m=\dfrac{n-1}{n}$, n与$n-1$互质, 故$m=2$, $n=2$, 第一行为$\dfrac12$, $\dfrac12$. 令$\dfrac1m+\dfrac1n=\dfrac12$ (m、$n\in\mathbf{N}^*$),

则有 $\dfrac{1}{m}=\dfrac{n-2}{2n}$, 当 $n-2=1$ 时, $n=3$, $m=6$, 当 $n-2=2$ 时, $n=4$, $m=4$, 当 $n-2$ 是 n 的约数时, 记 $n=R(n-2)$ $(R\in\mathbf{N}^*)$, $(R-1)n=2R$, R 与 $R-1$ 互质, 所以 $R-1=2$, $R=3$, 此时 $n=3$, 进而知 $m=6$, 故第2行填法不惟一, 可为 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, 也可为 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$.

(2) 猜想: 令第3行第1个数为 $\frac{1}{4}$, 则第3行各数依次为 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{4}$.

第1行: $\dfrac{1}{2\times1}$, $\dfrac{1}{2\times1}$;

第2行: $\dfrac{1}{3\times1}$, $\dfrac{1}{3\times2}$, $\dfrac{1}{3\times1}$;

第3行: $\dfrac{1}{4\times1}$, $\dfrac{1}{4\times3}$, $\dfrac{1}{4\times3}$, $\dfrac{1}{4\times1}$;

$\cdots$;

第 n 行: $\dfrac{1}{(n+1)C_n^0}$, $\dfrac{1}{(n+1)C_n^1}$, $\cdots$, $\dfrac{1}{(n+1)C_n^{n-1}}$, $\dfrac{1}{(n+1)C_n^n}$.

$\therefore$ 猜想第 n 行第 r 个数为 $\dfrac{1}{(n+1)C_n^{r-1}}$.

(3) 设 a_{100} 在原数表第 n 行中, 则 $\dfrac{n(n+1)}{2}<100\leqslant\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, 知 $n=13$, $\dfrac{13\times14}{2}=91$. 故知 a_{100} 在原数表中为第13行第9个数, 即 $\dfrac{1}{14C_{13}^8}=\dfrac{1}{18018}$. 原数表第 n 行各数的倒数和为

$$(n+1)(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)=(n+1)2^n.$$

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{100}\dfrac{1}{a_i}=1\times2^0+2\times2^1+\cdots+14\times2^{13}-14(C_{13}^9+C_{13}^{10}+C_{13}^{11}+C_{13}^{12}+C_{13}^{13})$.

记 $A=1\times2^0+2\times2^1+\cdots+14\times2^{13}$, 则 $2A=1\times2^1+2\times2^2+\cdots+13\times2^{13}+14\times2^{14}$.

两式相减得

$$A=14\times2^{14}-(2^0+2^1+\cdots+2^{13})=14\times2^{14}-\frac{2^{14}-1}{2-1}=13\times2^{14}+1,$$

又 $C_{13}^9+C_{13}^{10}+C_{13}^{11}+C_{13}^{12}+C_{13}^{13}=1+C_{13}^1+\cdots+C_{13}^4=1+C_{14}^2+C_{14}^4=1093$,

$$\therefore \sum_{i=1}^{100}\frac{1}{a_i}=13\times2^{14}+1-14\times1093=197691.$$

评注: 本题直接由新教材研究性课题"杨辉三角"改变问法制成, 表格不是直接给出, 而是综合了组合数性质、数列求和等多个知识点, 引导学生自己进行探索制成.

例4 (苏锡常联考模拟题) 如图4, 是在竖直平面内的一个"通道游戏". 图中竖直线段和斜线段都表示通道, 并且在交点处相通, 假设一个小弹子在交点处向左或向右是等可能的. 若竖直线段有一条的为第一层, 有两条的为第二层, $\cdots\cdots$, 依此类推, 现有一颗小弹子从第一层的通道里向下运动.

(1) 求该小弹子落入第4层第2个竖直通道的概率(从左到右数);

(2) 猜想落入第 $n+1$ 层的第 m 个通道里的概率;

(3) 该小弹子落入第 n 层第 $m-1$ 个竖直通道的概率与该小弹子落入第 n 层第 m 个竖直通道的概率之和等于什么?

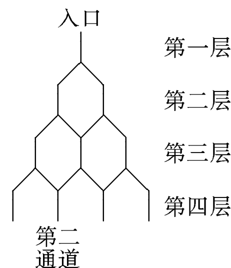


图 4

分析: 不难发现, 该装置的原型为"杨辉三角", 利用其基本性质及蕴涵的数量关系, 问题便迎刃而解.

略解: (1) 因为小弹子在交点处向左或向右是等可能的, 所以小弹子落入第4层第1个竖直通道的路径只有1条, 落入第4层第2个竖直通道的路径有3条, 第3个有3条, 第4个有1条. 故所求概率

$$P=\frac{3}{1+3+3+1}=\frac{3}{8}.$$

(2) 设小弹子落入第 $n+1$ 层第 m 个通道里的概率为 $P_{(n+1,m)}$, 根据杨辉三角形的特点可猜想, 所求的概率

HPM的创立与发展

235000 安徽省淮北市第一中学 周恩超

数学史对数学教学的意义早在19世纪已经为许多数学家和数学教育家所关注, 如法国数学家泰尔凯(O. Terguem, 1782～1862)、英国著名数学家德摩根(A. De Morgan, 1806～1871)、丹麦著名数学家邹腾(H. G. Zeuthen, 1839～1920)、美国著名数学史家卡约黎(F. Cajori,1859～1930)和史密斯(D. E. Smith, 1860～1944)等. 经过百余年的思想积淀, 到了20世纪70年代, 数学史对数学教育的意义已是许多数学家和数学教育家的共识, 相关研究的必要性也已凸现出来. 了解HPM的历史及所倡导的一些理念, 对当今的中学数学教师来说是必要的, 本文对HPM的创立与发展作一些介绍.

一、HPM的创立及工作目标

要对HPM的创立过程有比较清楚的了解, 就有必要了解与之相关的数学研究机构与团体, 下面给予简要介绍.

"国际数学家大会"(International Congress of Mathematicians,缩写ICM)是国际数学界四年一度的集会. 为了促进数学家之间的交流和了解, 瑞士苏黎世公立高等技术学校的数学家们于1896年成立了一个委员会, 负责组织了数学家于1897年在苏黎世的聚会, 会议采用"国际数学家大会"这一名称, 沿用至今. 1900年, 法国数学会在巴黎组织了第二届会议, 会上德国数学家希尔伯特(D. Hilbert, 1862～1943) 发表了关于23个数学问题的著名演说. 以后除因两次世界大战在1912～1920年和 1936～1950年中断外, 迄今为止, 国际数学家大会已成功举办了24届. 2002年第24届国际数学家大会在中国北京成功召开, 这是中国数学界的一件大事.

1908年4月在罗马召开的第四届国际数学家大会上, 决定建立一个国际数学教育机构——这就是"国际数学教育委员会"(International Commission on Mathematical Instruction, 缩写ICMI). 设置本机构是为了进行有关的数学教育和理科教育的活动, 合理规划各级数学教育的进一步发展, 并使公众认识数学教育的重要性. 在第一次世界大战前, 国际数学教育委员会共举办了四届国际数学会议, 后因两次世界大战而停止工作. 1952年成立的"国际数学联合会"(1950年在美国纽约联合发起, 1952年在意大利成立的各国全国性数学会的联合体——International Mathematical Union, 缩写IMU)重建了国际数学教育委员会. 当时IMU曾委任了一个委员会去筹建, 1954年这个委员会成立正式的国际数学教育委员会的执行委员会(the ICMI Executive Committee). 在多方

$$P_{(n+1,m)}=\frac{C_n^{m-1}}{C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n}=\frac{C_n^{m-1}}{2^n}.$$

(3) $\because C_{n-1}^{m-2}+C_{n-1}^{m-1}=C_n^{m-1}$,

$\therefore \dfrac{C_{n-1}^{m-2}}{2^{n-1}}+\dfrac{C_{n-1}^{m-1}}{2^{n-1}}=\dfrac{C_n^{m-1}}{2^{n-1}}$,

即 $P_{(n,m-1)}+P_{(n,m)}=2P_{(n+1,m)}$, 所以小弹子落入第$n$层第$m-1$个竖直通道的概率与该小弹子落入第$n$层第$m$个竖直通道的概率之和等于小弹子落入第$n+1$层第$m$个竖直通道的概率的两倍.

评注: 本题巧妙地将概率知识与"杨辉三角"相结合, 通过观察, 发现本题原型即"杨辉三角", 利用"杨辉三角"的基本性质, 使问题迎刃而解.

努力下, 国际数学教育委员会(ICMI)于1969年恢复了组织, 并于同年在法国里昂召开了二战后第一届国际数学教育会议(the first International Congress on Mathematical Education, 缩写ICME-1). 每四年举办一次, 迄今已举办10届国际数学教育会议.

1972年在英国爱塞特(Exeter)举办了第二届国际数学教育会议(ICME-2). 在当年的ICMI会议中, 美国数学史家、Michigan大学的P.S.Jones和英国Roehamptom高等教育研究所的Leo Rogers联合组织了一个"数学史与数学教学"的工作团队. 这就是现在HPM的雏形. 到了1976年的德国卡尔斯鲁厄(Karlsruhe) ICME-3时, P.S.Jones和Roland Stowasser用"作为课程设计重要工具的数学史"为标题, 召开了三次会议. 这种举动确保了在以后的ICME中, 研究"数学史与数学教学"的工作团队将可以定期集会. 数学教育委员会中的执行委员会非常欢迎这个研究团队的加入. 当时这个团体的名称为"与ICMI共同合作的数学史与数学教学之关系研究小组" (International Study Group on Relations between History and Pedagogy of Mathematics, cooperating with the International Commission on Mathematical Instruction, 简称ISGHPM). 该名称于1984年在Bruce Meserve的建议下改为我们所熟知的HPM.

团队成立的当时, 有许多理想与目标作为其努力的方向:

1. 促进以下事项的国际间的接触与交流:

(1) 大学与学院中的数学史课程;

(2) 数学教学中数学史的使用及其关联;

(3) 不同层面中对于数学史与数学教育的观点;

2. 促进数学家、数学史家、数学教师、社会科学家以及数学的使用者们之间的交流, 来刺激各学科间的研究.

3. 对于数学发展与对数学发展有所贡献的事物, 能够有更深的了解.

4. 将数学教学和数学史教学以及数学的发展作连结, 进而对于教学的改善和课程的建设发展有所帮助.

5. 为数学教师提供各种资源, 并促进各种数学教学的研讨与交流.

6. 促进数学史料及相关领域的更多接触.

7. 让数学家与数学教师对于数学史与数学教学之间的关联有更深一层的认识.

8. 让大家知道数学史在人类文化发展中具有相当重要的意义.

二、HPM的发展概况

HPM于1972年创立之后. 其后的HPM会议都是伴随在国际性的大会中举行. 如上所述, 1976年的HPM会议在德国召开ICME-3会议时举行, 会上确定了自己团队的名称以及工作目标.

到了1978年, HPM团队活动的精神已经渗透到其他组织中, 例如, 这年在芬兰赫尔辛基(Helsinki)举办的第十八届国际数学家大会ICM中,曾安排了一场关于"数学史与数学教育关系"的学术会议, 此会议是由英国开放大学的Graham Flegg主持. 在这次会议中确定了HPM组织所担任的两个重要角色: 一是将数学史的有关知识和资源信息向世界各地传播; 二是在一些国际会议(如ICM、ICME)中组织有关的国际学术会议.

1980年的HPM会议在美国伯克利举行, 当时第四届国际数学教育会议(ICME-4)在此召开, 此届会议选出了两位新的HPM主席Bruce Meserve和Stowasser. 有四位数学家在会上发表了演讲, 他们集中讨论了以下两个专题:"在中小学数学教学中如何运用数学史知识?" 以及"在数学教育中数学史与心理的关联". 同时英国数学教育家Leo Rogers在当年创办了HPM通讯, 并担任主编一职.

1984年, HPM会议在美国旧金山的University High School举行, 会议由该校的Craig McGarvey主持. 此次会议开创了一项创举. 即开始采用卫星会议的方式进行, 这一传统被以后的HPM会议保留了下来. 这极大地推动了HPM在世界各国的影响力. 这一年,

国际数学教育会议(ICME-5)在澳大利亚的墨尔本举行. 会议上Ubiratan D' Ambrosio和Christian Houzel被选为下一届主席. 另外, Bruce Meserve建议创立HPM的分会, 这一提议被顺利通过.

1988年, HPM会议在意大利的罗伦萨举行. 延续四年前的先例, 采用了卫星会议的形式. 由当时的主席Ubiratan D'Ambrosio组织召开. 与会学者来自美国、日本、匈牙利、波兰、澳大利亚、尼日利亚、卡塔尔、希腊、罗马尼亚等地, 是那时为止阵容最国际化的一届. 而当年的第六届国际数学教育会议(ICME-6)却是在匈牙利的布达佩斯举行. 从此, HPM卫星会议都会在当年的ICME时间前后几天召开, 而地点也会选在附近的国家, 为的是让那些没办法参加ICME的人们, 也能借此参与HPM的讨论与研究. 当然, 这样的活动也可以缩短国际间的距离, 通过来自世界各地的学者的学术交流, 让HPM更迅速地推广到世界的每个角落. 会议中Florence Fasanelli被选为下一届HPM的主席, HPM通讯的主编已由Victor Katz担任.

1992年在加拿大的多伦多召开了HPM的卫星会议, 会议由Florence Fasanelli和Craig Fraser (Toronto大学) 以及Israel Kleiner (York大学) 负责组织. John Fauvel被选为下一届主席, 而Victor Katz则续任HPM通讯的主编. 紧接着, 在加拿大的魁北克召开了ICME-7. 会上来自法国的Evelyne Barbin提出了许多有关古代数学问题的报告, 并为中学教师提供了教学中一个介绍历史观点的方法.

1996年的7月24日～7月30日, HPM会议在葡萄牙的布莱哥(Braga)举行, 会上Jan van Maanen被选为下一届主席. 这一次的HPM非常特别, 它与"欧洲区大学暑期数学史与数学教学教育研习班"合办, 因此与会学者除了来自世界各地的数学史专家外, 还有很多中小学教师, 总计超过550人. 而在同年的7月14日～7月21日, 第八届ICME会议在西班牙的塞维利亚(Seville)举行.

2000年8月9日～8月14日, HPM会议在中国台湾举行, 台湾师范大学的洪万生教授负责主办了这次的HPM卫星会议, 会议标题为"数学史与数学教育: 新千年的挑战". 有来自全球19个国家的学者们参与, 与上届一样, 有很多数学教师参加了这次HPM会议, 无疑这极大促使了中学数学教师更加关注数学史在课堂教学中的作用. 同年的7月31日～8月6日, 在日本主办了第九届ICME会议, 会议中意大利学者Fulvia Furinghetti被选为HPM的下一届主席, 而Peter Ransom则接任新的HPM的通讯主编.

2004年8月, HPM会议在瑞典的Uppsala大学举行, 与会者大约有两百多人(比2000年台北HPM稍多), 由于地理的优势, 参加者欧洲学者居多. 来自澳洲的Gail FitzSimons作了一个很有前瞻性的综合报告令人耳目一新. 另外, 在有关"历史上与教室中的证明"的小组讨论中, Guershon Harel提出了"因果式证明模式" (causality proof scheme)的考察.

HPM卫星会议每隔四年举办一次. 由于数学史对数学教育的价值越来越引起人们的广泛关注. 所以在1986、1990、1994、1995年期间也召开了许多和HPM有关的会议, 1998年4月20日～4月26日, 在法国马塞附近的Luminy镇, HPM主办了"数学史在数学教育中的作用"国际研讨会. 会议结束后,用英文写成的《数学教育中的历史》一书于2000年由Kluwer Academic Publishers出版, 此书是第一本论述数学史融入数学教育的国际性著作.

经过二十多年来的努力与推展, HPM逐渐成为国际数学教育界必谈的重要课题. 数学史对于数学教师而言不仅是教学工作中必备的知识, 而且也是形成数学思想和科学探索信念的精神源泉. 相信在未来的HPM会议中, 会有愈来愈多的中学数学教师参与进行研讨. 关注数学史的重要价值已经成为一种国际潮流, 这必将有助于我国新一轮中学数学课程的改革与实施.

⊙?⊙⊙

数学问题与解答

2005年第2期问题解答

⊙⊙!⊙

636. 如图1, $\triangle ABC$的内切圆$\odot O$切BC边于D, DE为$\odot O$的直径, AE的延长线交BC于F, 求证: $BD=CF$.

图 1

证: 过F作BC的垂线与AO的延长线相交于O', 过O'分别作AB、AC的延长线的垂线, 垂足为N、M. 显然$OE/\!/O'F$, 由此

$$\frac{AO}{AO'}=\frac{OE}{O'F}\cdots\cdots①$$

设$\odot O$切AC于G, 连结OG, 得$OG/\!/O'M$, 从而有

$$\frac{AO}{AO'}=\frac{OG}{O'M}\cdots\cdots②$$

比较①、②, 且因$OE=OG$, 得$O'F=O'M$, 同理, $O'F=O'N$. 因此, 以O'为圆心, $O'F$为半径作$\triangle ABC$的旁切圆, 必然切AN、BC、AM于N、F、M三点.

令$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$, a、b、c为$\triangle ABC$的$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边长, 则有

$AM=AN=s$,

$CF=CM=AM-AC=s-b=BD$.

637. 如图2, $\angle AFE=\angle ACB$, $\triangle AEF$与$\triangle ABC$面积相等, $EC\perp AB$, $FB\perp AE$, 求证: $AB=AE$.

图 2

证: 令$\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{AF}=n\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{FE}=a\overrightarrow{i_1}$, $\overrightarrow{CB}=b\overrightarrow{j_1}$, 其中$\overrightarrow{i}$、$\overrightarrow{j}$、$\overrightarrow{i_1}$、$\overrightarrow{j_1}$都是单位向量, m、n、a、b都是正数, 记$\angle AFE=\angle ACB=\alpha$, 则

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=m\overrightarrow{j}+b\overrightarrow{j_1}$,

$\overrightarrow{AE}=n\overrightarrow{i}+a\overrightarrow{i_1}$,

$\overrightarrow{CE}=n\overrightarrow{i}+a\overrightarrow{i_1}-m\overrightarrow{j}$,

$\overrightarrow{FB}=m\overrightarrow{j}+b\overrightarrow{j_1}-n\overrightarrow{i}$,

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FB}=mn\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j}+bn\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j_1}+am\overrightarrow{i_1}\cdot\overrightarrow{j}+ab\overrightarrow{i_1}\cdot\overrightarrow{j_1}-an\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{i_1}-n^2=0\cdots\cdots①$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=mn\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j}+bn\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j_1}+am\overrightarrow{i_1}\cdot\overrightarrow{j}+ab\overrightarrow{i_1}\cdot\overrightarrow{j_1}-bm\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{j_1}-m^2=0\cdots\cdots②$

①$-$②得

$an\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{i_1}+n^2=bm\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{j_1}+m^2\cdots\cdots③$

因$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ABC}$, 故

$\dfrac{1}{2}na\sin\alpha=\dfrac{1}{2}mb\sin\alpha$,

$na=mb$.

又$\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{i_1}=-\cos\alpha=\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{j_1}$, 因此,

$an\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{i_1}=bm\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{j_1}$.

结合③知$n^2=m^2$, $n=m$. 从而$a=b$. 于是

$\triangle AFE\cong\triangle ACB$, $AE=AB$.

638. 求证: 锐角三角形的垂心到各顶点的距离之积不大于其内心到各顶点的距离之积.

证: 如图3, 设锐角$\triangle ABC$的垂心为H, 内心为I, 外接圆半径为R.

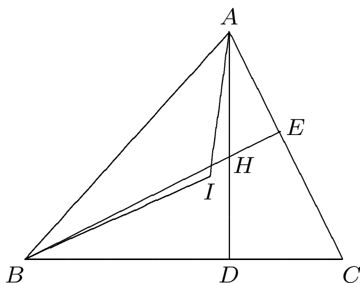


图 3

$$HA=\frac{AE}{\sin\angle AHE}=\frac{AE}{\sin C}=\frac{AB\cos A}{\sin C}=2R\cos A.$$

同理, $HB=2R\cos B$,

$HC=2R\cos C$.

在$\triangle ABI$中, $\angle BAI=\dfrac{A}{2}$, $\angle ABI=\dfrac{B}{2}$, $\angle AIB=90^\circ+\dfrac{C}{2}$. 由正弦定理得

$$\frac{IA}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{AB}{\sin\left(90^\circ+\frac{C}{2}\right)}=\frac{AB}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{2R\sin C}{\cos\frac{C}{2}}=4R\sin\frac{C}{2},$$

即 $IA=4R\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

同理, $IB=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}$,

$IC=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}$.

欲证 $HA\cdot HB\cdot HC\leqslant IA\cdot IB\cdot IC$ 只需证

$$\cos A\cos B\cos C\leqslant 8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \tan A\tan B\tan C\geqslant\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}=\frac{2\sin C}{\cos(A-B)-\cos C}\geqslant\frac{2\sin C}{1-\cos C}=2\cot\frac{C}{2}.$$

当且仅当$A=B$时, 等号成立.

同理, $\tan B+\tan C\geqslant 2\cot\dfrac{A}{2}$,

$\tan C+\tan A\geqslant 2\cot\dfrac{B}{2}$.

相加并除以2得

$$\tan A+\tan B+\tan C\geqslant\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}.$$

又在$\triangle ABC$中, 有

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C,$$

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$

$$\therefore\ \tan A\tan B\tan C\geqslant\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$

于是原命题得证.

639. 设$\{a_n\}$为正项等差数列, 其任意前n项的和$S_n\geqslant 2$, m、n、k为正整数, 求证:

(1) 若$m+k=2n$, 则$S_m+S_k\leqslant S_n^2$;

(2) $S_1+S_2+\cdots+S_{2n+1}<\left(\dfrac{nS_n+1}{2}\right)^2$.

证: (1) 设$\{a_n\}$的公差为d, 由$m+k=2n$得

$$mk\leqslant\left(\frac{m+k}{2}\right)^2=n^2,$$

$$(m-1)(k-1)=mk-(m+k)+1\leqslant n^2-2n+1=(n-1)^2,$$

$$S_mS_k=\left[ma_1+\frac{1}{2}m(m-1)d\right]\left[ka_1+\frac{1}{2}k(k-1)d\right]$$

$$=mk\left[a_1^2+\frac{1}{2}(m+k-2)a_1d+\frac{1}{4}(m-1)(k-1)d^2\right]$$

$$\leqslant mk\left[a_1^2+(n-1)a_1d+\frac{1}{4}(n-1)^2d^2\right]$$

$$\leqslant n^2\left[a_1+\frac{1}{2}(n-1)d\right]^2$$

$= \left[na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d\right]^2 = S_n^2.$

由题设知 $\frac{1}{2}S_m \geqslant 1$, $\frac{1}{2}S_k \geqslant 1$,

$\therefore S_m + S_k - S_m S_k$

$= S_m\left(1 - \frac{1}{2}S_k\right) + S_k\left(1 - \frac{1}{2}S_m\right)$

$\leqslant 0$,

故 $S_m + S_k \leqslant S_m S_k \leqslant S_n^2$.

(2) 由(1)得

$S_1 + S_{2n-1} \leqslant S_n^2$,

$S_2 + S_{2n-2} \leqslant S_n^2$,

$\cdots$,

$S_{n-1} + S_{n+1} \leqslant S_n^2$.

把这$n-1$个不等式相加, 再把所得的结果两边同加上S_n, 得

$S_1 + S_2 + \cdots + S_{2n-1}$

$\leqslant (n-1)S_n^2 + S_n$

$= [(n-1)S_n + 1]S_n$

$< \left[\frac{(n-1)S_n + 1 + S_n}{2}\right]^2$

$= \left(\frac{nS_n+1}{2}\right)^2.$

640. a、b、c是三个正数, 求证: $\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$.

证: 令$abc = m^3$, 于是可设$a = \frac{ma_2}{a_1}$, $b = \frac{ma_3}{a_2}$, $c = \frac{ma_1}{a_3}$, 这里$a_1 = \sqrt[3]{\frac{c}{a}}$, $a_2 = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $a_3 = \sqrt[3]{\frac{b}{c}}$是正数, 这样, 要证明的不等式可化为

$$\frac{a_1}{a_2 + ma_3} + \frac{a_2}{a_3 + ma_1} + \frac{a_3}{a_1 + ma_2} \geqslant \frac{3}{1+m}.$$

由柯西不等式得

$[a_1(a_2 + ma_3) + a_2(a_3 + ma_1) + a_3(a_1 + ma_2)]\left(\frac{a_1}{a_2 + ma_3} + \frac{a_2}{a_3 + ma_1} + \frac{a_3}{a_1 + ma_2}\right) \geqslant (a_1 + a_2 + a_3)^2$, 即

$(1+m)(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)\left(\frac{a_1}{a_2 + ma_3} + \frac{a_2}{a_3 + ma_1} + \frac{a_3}{a_1 + ma_2}\right)$

$\geqslant (a_1 + a_2 + a_3)^2$.

$\therefore \frac{a_1}{a_2 + ma_3} + \frac{a_2}{a_3 + ma_1} + \frac{a_3}{a_1 + ma_2}$

$\geqslant \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)}{(1+m)(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)}$

$\geqslant \frac{3}{1+m}$ ($\because a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geqslant a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$).

从而要证明的不等式得证.

2005年第4期问题

641. P为$\triangle ABC$的内心, 射线BP交AC于Q, 当$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$时, 求$\angle A$的大小.

(安徽　黄全福供题)

642. 设M、N分别是矩形$ABCD$的边BC、DA的中点, MN交AC于点O. 若线段OA上存在点P, 使直线NP被直线CD和直线AC所截得的线段长PQ等于PM, 求$\angle ACD$的取值范围.

(四川　方廷刚供题)

643. 设α_1、α_2、α_3、$\alpha_4 > 0$, 且$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \pi$, 求证:

$$\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\alpha_3+\alpha_4)\sin(\alpha_4+\alpha_1) \geqslant 4\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\sin\alpha_4.$$

(安徽　胡　雷　郝文华供题)

644. 设x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$为正实数, 满足$x_1 \leqslant 1$, $x_1 + x_2 \leqslant 5$, $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 14$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 30$, 求$U = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4$的最大值.

(陕西　安振平供题)

645. 设P及l为一平面内的一定点及一定直线, 过P作n条直线$l_1, l_2, \cdots, l_n$ $(n \geqslant 2)$, 如果这n条直线中相邻的两条所成的角都是$\frac{\pi}{n}$, 又l_i与l交于点M_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 求证: $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{PM_i^2}$为定值.

(江苏　徐　道供题)

(本栏目责任编辑　李大元　汪纯中)

编后漫笔

祝何忆捷走好奥数金牌之路

张奠宙

2004年, 上海科技出版社推出新书: 《高中奥数命题研究与训练题集》, 作者是2003年中国数学奥赛金牌获得者, 上海延安中学的学生何忆捷. 他现在是复旦大学数学系二年级学生. 因为延安中学李汉云校长的推荐, 我和何忆捷同学有过一些交往. 他的奥数金牌之路引发了我的许多感想.

关于奥林匹克数学竞赛的价值, 近来媒体多有评论. 客观地说, 数学奥林匹克竞赛的确出过不少人才. 2002年在北京举行的国际数学家大会上, 荣获费尔兹奖的拉发格, 就是1966年国际奥赛的金牌选手. 文革以后首届国家数学奥赛优胜者李俊, 现在是美国斯坦福大学教授, 曾经应邀在国际数学家大会做45钟报告.

事实上, 能够在数学奥赛中争金夺银, 都是同辈中的佼佼者, 具有相当的发展潜力. 如果引导得当, 将来成材的可能性很大. 但是, 如果引导不当, 也会把孩子"训死"、"捧杀". 那么, 何忆捷同学的金牌之路能够走好吗?

先看看何忆捷怎样走向奥数金牌. 这是一位才华横溢的少年. 13岁时取得二胡演奏10级证书, 屡屡登台表演, 录制CD, 出访美国和日本. 初二开始喜欢数学, 参加奥赛获奖无数. 他学习数学的办法是"编题". 做一题, 改造一题, 时不时研究一些原创题. 到读高二的时候, 已经有了100多道具有自己特色的数学题. 最后, 在夺取全国金牌之后, 写了上述的书.

何忆捷接着进了复旦大学数学系, 顺利跨过了变量数学的难关, 正在望着美丽的现代数学高峰, 一步步地前进. 最近, 他发给我一篇文章, 研究反常积分: 在$p>0$的前提下, 讨论反常积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$的敛散性. 这本是一道讨论$\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$敛散性的习题. 何忆捷进一步问$\sin 2x$可以推广到$\sin ax$(正实数$a$)吗? 结果得出了12个命题.

我想, 何忆捷同学正在走着坚实的数学学习道路. 数学人生, 金牌人生, 应该是朴实无华的, 又是自由创造的.

近来, 对数学奥林匹克竞赛的批评很多. 其实, 数学奥赛本身并没有错. 问题出在某些不恰当的引导上. 中国传统的"科举文化"、"状元情结", 把奥赛当作了"金榜题名"的人生大事. 过度的奥数应试, 扼杀了学生的学习兴趣和创造灵气.

奥数竞赛是学习场, 不是名利场. 奥赛金

(下转第4–20页)

数学教学
SHU XUE JIAO XUE
2005年第4期
(总第211期)
主编: 张奠宙 赵小平
常务副主编: 忻重义
电 话: 021–62232712

主办单位: 华东师范大学
出 版: 《数学教学》编辑部
邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)
广告许可证: 沪工商广字07017号
印 刷: 华东师范大学印刷厂
国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局
国内订阅: 全国各邮电局
电子信箱: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价: 3.80元 国内统一刊号: CN31–1024/G4 每月12日出版 代号: 4–357